Pubblicazione bimensile. N. 1.

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 1°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

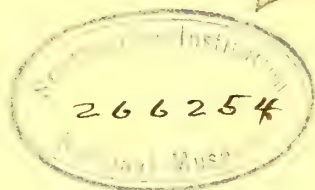
1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Meccanica. — *L'ordinaria teoria dell'Elasticità e la teoria delle deformazioni finite.* Nota del Corrisp. E. Almansi [1].

1. In alcune Note pubblicate, nel 1911, in questi stessi Rendiconti, ho esaminate le deformazioni finite dei solidi elastici, proponendomi particolarmente di ottenere delle formule che si avvicinassero, quanto più era possibile, a quelle della teoria ordinaria.

Nella teoria ordinaria si studiano le deformazioni *infinitesime*; si ammette poi che, in via di approssimazione, le formule ottenute valgano anche per deformazioni sufficientemente piccole, e siano quindi applicabili all'esame di fenomeni reali.

Ma, come è ben noto, queste formule non corrispondono, con sufficiente esattezza, ai risultati delle osservazioni, dalle quali in particolare risulta che le componenti di tensione non sono rappresentabili, se non con una approssimazione per la maggior parte dei materiali molto grossolana, mediante funzioni lineari delle caratteristiche della deformazione. D'onde la necessità di prendere in esame le deformazioni *finite*: di studiare, cioè, le deformazioni dei solidi elastici, tenendo conto anche di quei termini che nella teoria ordinaria vengono trascurati. Si possono così ottenere formule più esatte di quelle che fornisce l'ordinaria teoria; e le esperienze potranno allora essere rivolte a determinare, per i diversi materiali, i valori delle costanti che queste formule conterranno.

2. La teoria delle deformazioni elastiche finite presenta, d'altronde, molto interesse anche da un punto di vista puramente teorico; e ciò in

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1917.

particolare per il fatto che in essa non sussistono quei teoremi i quali nella teoria delle deformazioni infinitesime figurano come teoremi fondamentali.

Dato un corpo elastico C, io chiamerò *deformazione elastica* del corpo il passaggio da uno stato iniziale S_0 ad uno stato finale S_1, allorchè le proiezioni u, v, w degli spostamenti dei punti, e le loro derivate prime e seconde, sono funzioni finite e *continue* delle coordinate.

E quando, assunto uno stato S_0 di C come stato di riferimento, denoterò con S_1 un altro stato *dello stesso corpo* C, intenderò che C possa passare dallo stato S_0 allo stato S_1 mediante una deformazione che soddisfi alla condizione indicata.

Premesso questo, ricordiamo come nella ordinaria teoria della Elasticità si dimostri che *se* S_0 *è uno stato d'equilibrio per un corpo* C *non soggetto a forze esterne, non esistono per il corpo* C, *in assenza di forze esterne, altri stati d'equilibrio* (purchè, secondo la convenzione qui fatta, si considerino come possibili stati *del corpo* C solo quelli che si ottengono, partendo da S_0, mediante deformazioni a spostamenti continui).

Ora l'osservazione mostra che vi sono dei casi nei quali questo teorema non risulta verificato.

L'esempio più semplice è fornito dal *rovesciamento di un anello*. Consideriamo lo spazio generato da una superficie piana σ, la quale ruoti intorno ad una retta r situata nel piano di σ e che non incontri questa superficie. Tale spazio sia occupato da un corpo C, elastico, isotropo, non soggetto a forze esterne, in equilibrio; tutte le particelle di cui è formato C siano allo stato naturale. Diremo S_0 questo stato del corpo.

Dall'osservazione risulta che esiste per il corpo C, in assenze di forze esterne, un altro stato d'equilibrio S_1. Si passa dallo stato S_0 allo stato S_1 mediante una deformazione elastica la quale consiste essenzialmente in una rotazione di 180° compiuta da ciascuna sezione σ dell'anello intorno alla retta baricentrica normale al suo piano. La rotazione è poi accompagnata da una piccola deformazione che la sezione subisce nel piano in cui essa giace.

Esistono, dunque, per un anello non sollecitato da forze esterne, due diversi stati d'equilibrio, S_0 ed S_1.

Non v'è alcuna ragione perchè la teoria della Elasticità debba escludere *a priori*, dal campo delle proprie ricerche, gli stati d'equilibrio del tipo di S_1. E notiamo che essi non vengono esclusi, finchè non siano fissate la forma e le dimensioni del corpo, nemmeno se s'impone, in qualche modo, un limite alla grandezza della deformazione delle singole particelle materiali. Supponiamo che sia assegnato un limite superiore al valore assoluto degli allungamenti unitarî degli elementi lineari del solido. Nel caso dell'anello, la stessa intuizione ci fa prevedere che questo limite non sarà superato, purchè la lunghezza dell'asse dell'anello (luogo dei baricentri delle

sezioni σ) sia sufficientemente grande rispetto alle dimensioni lineari di una sezione; essendo evidente che se la lunghezza dell'asse oltrepassa un certo limite, lo stato di deformazione delle singole particelle, dovuto al rovesciamento, non sarà più apprezzabile.

3. La sola condizione che per ciascuna particella materiale la deformazione sia piccolissima non basta, dunque, ad escludere questa classe di deformazioni elastiche. Esse vengono escluse allorchè si suppone (come nella teoria ordinaria) che siano piccolissime *tutte* le derivate prime di u, v, w rispetto alle coordinate; mentre, affinchè sia piccolissima la deformazione di ciascuna particella, basta che siano piccolissime quelle sei quantità che caratterizzano la deformazione stessa.

Nello studio delle deformazioni finite conviene assumere come variabili indipendenti le coordinate dei punti del solido nello stato *finale* S_1, essendo queste le variabili rispetto alle quali figurano derivate le componenti di tensione nelle equazioni indefinite dell'equilibrio. Come caratteristiche della deformazione, in un punto qualunque P del solido, si possono allora assumere le sei quantità

$$\varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_{zz},$$
$$\varepsilon_{yz}, \quad \varepsilon_{zx}, \quad \varepsilon_{xy},$$

date dalle formule

$$(1)\quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right\}. \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia piccolissima la deformazione della particella attigua al punto P, è che nel punto P siano piccolissime queste *sei* quantità; e ciò non esige che siano piccolissime le *nove* derivate $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$, ecc.

Se le sei caratteristiche risultano piccolissime, *e inoltre si fa la convenzione di trascurare le quantità dell'ordine di grandezza dei loro quadrati*, si può ritenere che le prime tre, $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$, rappresentino gli allungamenti unitarî relativi alle direzioni degli assi coordinati, le tre rimanenti gli scorrimenti relativi alle coppie di direzioni y e z, z ed x, x ed y.

Se poi le nove derivate sono esse stesse piccolissime, potremo porre

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdots\cdots \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

e ricadremo nelle formule della teoria ordinaria.

4. Da queste considerazioni vien posto in evidenza un fatto notevole: la possibilità di estendere il campo di ricerche della teoria dell' Elasticità, *anche rimanendo nell'ordine di approssimazione della teoria ordinaria.*

Denoti ζ una quantità che considereremo piccola del primo ordine. Le sei caratteristiche $\varepsilon_{xx}, \ldots, \varepsilon_{xy}$, date dalla formula (1), siano piccole dell'ordine di ζ; e conveniamo di poter trascurare, nelle loro espressioni, quantità piccole d'ordine superiore. Potremo allora ai secondi membri delle (1) aggiungere dei termini $\delta_{xx}, \ldots, \delta_{xy}$, piccoli d'ordine superiore a ζ, insieme alle loro derivate prime, ma del resto arbitrarî, ossia porre

$$(2) \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} + \delta_{xx}, \text{ ecc.,}$$

e assumere queste sei quantità come espressioni degli allungamenti e degli scorrimenti. Come espressioni delle componenti di tensione $\tau_{xx}, \ldots, \tau_{xy}$, dovremo conservare quelle della teoria ordinaria; in particolare, se il solido è isotropo, si dovrà ritenere

$$\tau_{xx} = \mathrm{A}\left\{\varepsilon_{xx} + k(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tau_{xy} = \mathrm{B}\varepsilon_{xy},$$

ove A, B, k denotano delle costanti. Le equazioni dell'equilibrio ci forniranno poi le componenti X, Y, Z ed L, M, N delle forze di massa e delle tensioni agenti in superficie.

Se noi sapremo determinare le funzioni u, v, w (finite, continue, ecc.), e i termini aggiunti $\delta_{xx}, \ldots, \delta_{xy}$ (piccoli dell'ordine voluto), in modo che lo stato assunto dal solido cogli spostamenti (u, v, w), stato che riterremo dovuto alle forze esterne (X, Y, Z) ed (L M, N), corrisponda ai dati del problema, potremo considerare questo come risoluto.

Il fondamento della teoria ordinaria consiste nel porre

$$\delta_{xx} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}, \text{ ecc.,}$$

quindi, per le formule (2), $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, ecc.; il che presuppone che le derivate prime delle funzioni u, v, w siano tutte piccole del 1° ordine (o d'ordine maggiore). La teoria generale delle deformazioni elastiche acquista allora una grande semplicità ed eleganza; ma si viene così ad escludere una classe di problemi, i quali possono essere risoluti colla stessa approssimazione, purchè si assegnino ai termini $\delta_{xx}, \ldots, \delta_{xy}$ espressioni diverse.

Nel caso di un anello circolare, denotando con 2πR la lunghezza dell'asse, con a la larghezza della sezione σ, vale a dire la massima distanza fra due rette tangenti al suo contorno e parallele alla retta r (§ 2), il

massimo valore assoluto degli allungamenti unitarî che hanno origine dal rovesciamento, supposto che a sia molto piccola rispetto ad R, è sensibilmente uguale al rapporto $\zeta = \frac{a}{R}$. E noi ci potremo proporre di determinare lo stato di deformazione che l'anello assume in seguito al rovesciamento, trascurando, nelle espressioni delle sei caratteristiche, quantità piccole d'ordine superiore rispetto a ζ.

Ciò, per altro, non esclude che il problema possa essere studiato e risoluto con un'approssimazione maggiore.

5. Il rovesciamento di un anello ci fornisce un primo esempio di uno stato d'equilibrio S_1, diverso dallo stato naturale S_0, che un solido elastico può assumere in assenza di forze esterne.

Un altro esempio ci è fornito da una lamina elastica di piccolo spessore, e non perfettamente piana. Esiste in molti casi uno stato d'equilibrio S_1, diverso dallo stato naturale, che si ottiene obbligando le gibbosità presentate dalla lamina a passare dalla parte opposta rispetto a quella ove esse si trovano inizialmente.

Sono ben note le importanti ricerche alle quali ha dato occasione, in questi ultimi anni, la teoria delle *Distorsioni*. Anch'essa mette in evidenza, per solidi elastici non sollecitati da forze esterne, stati d'equilibrio a cui corrispondono tensioni esterne diverse da zero.

Non esiste evidentemente nessuna analogia fra questa classe di fenomeni, e quelli di cui abbiamo dato sopra alcuni esempî.

Gli stati d'equilibrio S_1 da noi considerati si ottengono, infatti, partendo da uno stato S_0 in cui le tensioni sono tutte nulle, mediante una deformazione *a spostamenti continui*.

Nella teoria delle distorsioni, invece, si prendono in esame degli stati d'equilibrio, che diremo S'_0, i quali non si possono considerare ottenuti a partire da uno stato iniziale S_0 in cui tutte le tensioni siano nulle, *se non ammettendo che i relativi spostamenti dei punti presentino delle superficie di discontinuità*. Il passaggio dallo stato S_0 ad uno stato S'_0 non sarebbe dunque, secondo i criterii qui adottati, una vera e propria deformazione elastica.

A questo proposito mi sia consentito di notare che, nello studio dell'equilibrio elastico, converrebbe forse riportare il concetto di *deformazione* al suo significato primitivo, non comprendendo in tale denominazione se non deformazioni a spostamenti continui. Al di fuori di ogni considerazione di carattere analitico, l'ipotesi della continuità degli spostamenti sembra giustificata dal fatto che, se gli spostamenti sono discontinui, il fenomeno *fisico* si presenta sostanzialmente diverso.

Volendo, allora, limitarsi a considerare, per un determinato corpo C, quei soli stati che si ottengono, a partire da uno stato di riferimento, me-

diante deformazioni elastiche, dovrebbe dirsi, relativamente alla teoria delle Distorsioni, non già che essa considera stati d'equilibrio di corpi i quali ammettono uno stato S_0 in cui nessuna particella è soggetta a tensione; ma che essa insegna a costruire, con speciali procedimenti, dei corpi nei quali si hanno sempre, anche se le forze esterne sono nulle, tensioni interne diverse da zero; ed esamina gli stati d'equilibrio che questi corpi assumono in assenza di forze esterne.

Matematica. — *Osservazioni sui punti singolari delle curve multiple di una superficie algebrica.* Nota del dott. OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES [1].

1. In questa Nota mi propongo di svolgere alcune osservazioni critiche relative ai punti singolari che si possono presentare sopra una curva multipla per una superficie algebrica $f(x\,y\,z)=0$, avendo speciale riguardo all'abbassamento che questi producono sul genere e sulla classe delle sezioni piane o in generale superficiali; di queste osservazioni, alcune delle quali forse nuove e inaspettate, sembra necessario tener conto ove si voglia procedere con rigore nella delicata questione dell'analisi e della risoluzione delle singolarità di una superficie.

2. Per chiarezza cominciamo con l'osservare che sopra la curva, C, multipla per la superficie f (curva che può essere composta di più parti irriducibili dotate anche di diversa molteplicità) un punto, P, che sia semplice per la C, non deve ritenersi singolare per f, ove non abbassi la classe delle sezioni piane per esso, riuscendo punto base per il sistema delle curve L segate sopra la superficie f dalle sue polari, fuori della curva multipla C. Questa veduta tiene ad un noto teorema di Halphen sulla rappresentabilità di ciascuna falda della superficie f nell'intorno di un punto generico della curva multipla mediante serie: precisamente se ν è l'ordine della falda e $y=\Sigma a_i x^i$ lo sviluppo in serie della proiezione della curva C nell'intorno di P, si ha

$$z=\Sigma\Sigma a_{ik}\,x^i\,t^k$$
$$x=x\ ,\ y=t^\nu+\Sigma a_i\,x^i\,.$$

La dimostrazione più semplice di questo teorema si ha osservando che la sostituzione $y=t^\nu+\Sigma a_i x^i$ trasforma la superficie $f(x\,y\,z)=0$ in un'altra $f'(x\,t\,z)=0$ per cui z riesce funzione monodroma di x e t in corrispondenza alla falda d'ordine ν considerata, almeno se per il punto P

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1917.

non passava altra curva attraverso la quale si scambiassero due valori di z appartenenti alla nostra falda, il che può sempre supporsi — sciegliendo convenientemente gli assi — ove il punto semplice P non sia base per le curve L.

3. Un punto P, semplice per la curva multipla C, che sia base per le curve polari L, abbassa certo la classe delle sezioni piane passanti per esso, ma non in generale il genere; tuttavia nell'intorno (del prim'ordine o d'ordine superiore) di P vi è qualche punto che abbassa il genere delle sezioni superficiali obbligati a contenerlo, il che si riconosce facilmente nei singoli casi. Il più semplice esempio è offerto dall'ordinario punto cuspidale di una curva nodale (pince-point), nel quale due falde della superficie vengono a coincidere in una, le sezioni presentando una cuspide anzichè un nodo come accade per le sezioni generiche. Una facile verifica analitica (che — dato il carattere differenziale della questione — si può compiere supponendo C una retta) mostra che in un punto cuspidale P vi è in generale *una* retta, a (diversa dalla tangente alla C) asse di un fascio di piani che segano la superficie secondo curve aventi un tacnodo in P: il punto P_1, infinitamente vicino a P sulla retta a, risulta doppio per la superficie, e per esso passano effettivamente tutte le curve L. Ora se si eseguisce una trasformazione quadratica spaziale (di prima specie) che abbia come punto fondamentale isolato il punto cuspidale P, la nostra superficie f si trasforma in una superficie f' la quale avrà come doppia la curva C', trasformata di C, e su questa sarà punto cuspidale il punto P', omologo del punto di C infinitamente vicino a P. Ora P' essendo un punto cuspidale come P, prossimo ad esso e fuori della curva doppia esisterà un punto doppio P'_1, che si riconoscerebbe facilmente appartenere al piano fondamentale π, trasformato dell'intorno del punto P. Potendosi ripetere indefinitamente la trasformazione precedente, si riconosce che: *esiste una infinità discreta di punti doppi infinitamente vicini alla curva nodale* C, *nell'intorno di un suo punto cuspidale.*

Le varie particolarizzazioni del punto cuspidale si possono riconoscere nel modo più facile considerando superficie dotate di una conica doppia o multipla, proveniente da una trasformazione quadratica in cui la conica corrisponde alle generatrici del cono quadrico fondamentale (l'ipotesi che C sia una conica è una restrizione solo apparente). Si vede in tal modo che il caso in cui la suddetta retta a risulti tangente alla C dà origine a un *punto cuspidale* particolare, *riunione di due punti cuspidali infinitamente vicini* (quantunque la sezione generica non metta in luce alcuna differenza dal caso generale); *nell'intorno* di un siffatto punto cuspidale, P, *esiste* una *curva doppia infinitesima*; infatti se si eseguisce una trasformazione quadratica avente in P il punto fondamentale isolato, il punto P' prossimo

a P su C dà origine ad un tacnodo per la superficie trasformata, e le sezioni passanti per P′ hanno il genere abbassato.

Una generalizzazione del punto cuspidale ordinario è offerta dal punto cuspidale del terz'ordine, cioè da un punto P di una curva tripla (o di maggior molteplicità) in cui tre falde lineari si saldino in una del terzo ordine, le sezioni piane per P presentando un ramo ordinario nel terz'ordine. In un tale punto P le L presentano una cuspide con tangente fissa, e il punto P_1, successivo a P su questa tangente, è un punto doppio biplanare dispari, non limite di due punti doppî, quantunque il punto cuspidale P possa ritenersi limite di due punti cuspidali ordinarî infinitamente vicini.

La particolarità presentata da un punto cuspidale del second'ordine, che ne abbia un altro infinitamente vicino, si riscontra generalizzata per i punti delle curve cuspidali: *se* P *è un punto semplice di una curva cuspidale* C, *i punti* $P_1, P_2, P_3, \ldots$, *successivi a* P *sopra* C, *sono punti che alternativamente abbassano il genere* (*e non il rango*) *delle sezioni superficiali passanti per essi*; così le sezioni passanti per P, P_1, presentano in P tre punti infinitamente vicini e hanno il genere abbassato di un'unità, quelle passanti per P, P_1, P_2, P_3, ne presentano sei e hanno il genere abbassato di due unità, ecc. [1] [Di ciò si può dare una facile verifica analitica intersecando la superficie f con superficie cilindriche $y = y(x)$], e considerando la curva $f(z, x, y(x)) = 0$ e la relativa polare $\frac{\partial f(z, x, y(x))}{\partial z} = 0$].

4. Lasciando da parte i punti semplici di C che siano ipermultipli per f, i quali possono presentare le singolarità le più complicate, veniamo ai punti multipli della curva multipla, limitandoci ai casi più semplici. Chiameremo qui inessenziali quei punti nei quali la singolarità della superficie dipende dalla singolarità della curva multipla; ciò posto vediamo che:

Esistono punti multipli inessenziali della curva multipla che non abbassano nè il genere nè la classe delle sezioni piane.

Il caso più semplice viene offerto da un punto P ove s'incrociano due curve doppie o due rami di una stessa curva doppia: le sezioni per P presentano un tacnodo. Questo caso si realizza prendendo una superficie f composta di due superficie φ e ψ che si tocchino in P. Questo esempio si può generalizzare in due sensi: si ha un punto, P, ancor doppio per f, per cui la curva doppia passa con i rami (le sezioni per P presentando i punti doppî successivi) ove si sommino due superficie φ e ψ aventi a comune i paraboloidi osculatori fino all'ordine $i - 1$; si ha un punto i-plo per f

(1) Cfr. B. Levi, Annali di matematica, tomo 2°, serie III, *Intorno alla composizione* ecc., § 1, n. 5.

e per le sue sezioni, per cui passano $\frac{i(i-1)}{2}$ rami della curva doppia, sommando i superficie generiche passanti per P.

Esistono punti multipli inessenziali della curva multipla che abbassano il genere senza abbassare la classe delle sezioni piane.

Il caso più semplice viene offerto da un punto doppio che sia incrocio di due curve cuspidali, per es. l'origine delle coordinate nella superficie

$$f = z^2 - x^3 y^3 \varphi(x y z) = 0 ,$$

$\varphi(x y z)$ essendo un polinomio qualunque, per la quale sono rette cuspidali gli assi x e y: un piano che venga a passare per l'origine sega la superficie secondo una curva non più dotata di due cuspidi ma di tre punti doppî infinitamente vicini, sicchè il genere diminuisce di un' unità pur restando invariata la classe.

Il fatto messo in luce dall'esempio precedente sembra contraddire alla veduta che di un punto multiplo, abbassante il genere delle sezioni superficiali per esso, viene porta dalla geometria sopra le superficie, dove le curve fondamentali, θ, di un sistema lineare $|K|$, abbassanti il genere delle curve residue (cioè le curve fondamentali *proprie*) fan parte (generalmente) del sistema jacobiano di $|K|$: in corrispondenza a ciò, se le K divengono le sezioni piane della superficie f, e quindi la θ è rappresentata da un punto multiplo, P, abbassante il genere delle sezioni piane, dovrebbe P appartenere alle curve L, sezioni variabili delle polari di f, e quindi abbassare la classe delle sezioni che vengono a passare per P. Questa apparente contraddizione si risolve osservando che si può avere una θ, riducibile sopra una trasformata ad un punto semplice P, la quale dia luogo ad una eccezione per il teorema precedente: così accade di regola se P è punto comune a due curve luogo di coppie di punti infinitamente vicini neutre per $|K|$, nel qual caso le K costrette a passare per P acquistano ivi un punto doppio.

Esistono ancora punti multipli inessenziali della curva multipla che abbassano la classe ma non il genere delle sezioni piane. L'esempio più semplice si ottiene proiettando sullo spazio S_3 una superficie F di S_4 che abbia una trisecante p, passante per il centro di proiezione O, quando questa trisecante $(1,2,3)$ diventi tangente $(2=3)$. La proiezione, f, avrà un punto triplo P, la cui singolarità risulta dal fatto che per P passano un ramo lineare e un ramo cuspidale della curva doppia nodale di f; l'asserto si può verificare osservando come il ramo cuspidale corrisponda alla coincidenza delle due coppie di punti (1 2) e (1 3) allineati con O.

5. Nei casi che precedono il cono osculatore alla f nel punto P è sempre costituito di piani da contarsi una o più volte. Ora vale in generale il

Teorema: *Se un punto multiplo* P *della curva multipla è tale che il cono osculatore ad f non sia riducibile in un gruppo di piani* (*contenendo una parte essenzialmente conica*), *esso abbassa contemporaneamente il genere e la classe delle sezioni piane.*

Pongasi infatti che nel punto multiplo, P, della superficie f si abbia un cono osculatore non formato di piani, per es. contenente come parte un cono quadrico Q; facciamo vedere che, in forza di tale ipotesi, il punto P abbassa il genere e la classe delle sezioni piane passanti per esso. Perciò si assuma un piano π vicino a P, e si consideri la curva variabile K da esso segata su f; si vede che al limite, quando π viene a passare per P, la K acquista un nuovo punto doppio che va a fondersi nella singolarità P, perocchè spariscono due tangenti a K condotte per un punto generico di π.

Fisica. — *Sulla costante della legge di Stefan-Boltzmann.* Nota del prof. Luigi Puccianti in risposta alla dott. Marya Kahanowicz, presentata dal Socio A. Ròiti [1].

Nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei [2] è comparsa una Nota della dott. Marya Kahanowicz, presentata dal prof. Michele Cantone, nella quale alla succinta esposizione di una nuova determinazione di questa costante fisica generale, precedono alcuni sommarî giudizi sopra anteriori ricerche fatte allo stesso fine da varî sperimentatori, ed uno di tali giudizi sommarî, anzi una sommaria condanna tocca alle esperienze da me fatte e pubblicate nel Nuovo Cimento del 1912.

Il giudizio è il seguente:

« In quanto poi al radiatore di Puccianti è da notare che l'energia da « esso irradiata non può considerarsi come dovuta ad un corpo nero: 1° perchè « le pareti della cavità difficilmente potevano assumere temperatura uniforme, « per quanto si cercasse di mantenere il pallone nell'aria liquida fino al « collo; 2° perchè lo schermo che limitava l'area emittente non era mante- « nuto alla temperatura del ricevitore, nel quale caso, come risulta da alcune « mie esperienze dove si faceva fluire lentamente il liquido nella scatola in « cui era praticata la finestra, funzionano da sorgente anche le pareti che « limitano l'apertura, aggiungendo dell'energia a quella emessa dal radia- « tore ».

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1917.
(2) Seduta del 15 aprile 1917.

Il tono reciso di queste osservazioni mi autorizzano a rispondere con eguale franchezza.

La obiezione 1ª è priva di fondamento.

Infatti il pallone *era* sempre (durante le esperienze) immerso fino al collo, si *cercava* anzi di mantenere il livello fisso il più possibile, e questo per altra ragione come è spiegato al § IV della mia Memoria; ciò torna a dire che il livello variava tutt'al più di una piccola frazione del collo stesso. Non vi potevano dunque essere notevoli differenze di temperatura fra le varie parti della parete nella porzione dal collo in giù che costituisce il *corpo nero.*

Del resto la radiazione uscente dall'orifizio stretto di un'ampia cavità con pareti a temperatura non uniforme, equivale in ammontare a quella che la cavità stessa radierebbe quando fosse tutta a una temperatura compresa tra il valore massimo e il minimo; dunque una disuniformità di temperatura porterebbe nel risultato finale l'effetto di una incertezza nel valore della temperatura ϑ da sostituire nella formula [4 bis] della mia Memoria,

$$\sigma = \frac{E^2}{\varkappa R(\Theta^4 - \vartheta^4)}$$

e l'effetto di una incertezza anche di parecchi gradi sarebbe trascurabilissima perchè già il valore di ϑ^4 è meno della centesima di quello di Θ^4.

Dunque la causa di errore non si presenta in misura notevole, e anche se ciò fosse, non avrebbe nel caso considerato un'influenza apprezzabile sul risultato finale.

L'obiezione 2ª ha questa origine: la dott. Kahanowicz ha avuto occasione di verificare che se il suo diaframma limitatore posto alla bocca della stufa elettrica (la quale nelle sue esperienze fa da *corpo nero* più caldo) si scaldava, esso aggiungeva un termine alla radiazione da misurare, ed ha provveduto a evitare ciò con una attiva circolazione liquida, e ha fatto bene; essa pensa quindi che nel mio apparecchio il diaframma limitatore (D_2 della seconda figura della mia Memoria) si raffreddasse notevolmente, e portasse un termine notevole ad aggiungersi a quello principale dato dal pallone N, cioè aumentasse l'energia raggiante perduta dal bolometro.

Ma in questa supposizione essa erra, perchè il diaframma spesso, di rame, avvitato nel fondo del bagno di acqua agitata non è soggetto ad altra apprezzabile causa di raffreddamento che la radiazione verso il corpo nero N, essendo la conduzione trascurabile (anche se si vuole per effetto della circolazione di acqua ricordata alla fine del § III) e la convezione impossibile. Esso non poteva dunque raffreddarsi notevolmente, e d'altra parte il secondo diaframma della serie riduce la porzione della superficie interna visibile dal bolometro a una sottile corona di piccola area.

Le condizioni per ottenere lo scambio di energia raggiante tra due corpi neri con elementi geometrici ben determinati, cioè le condizioni fondamentali per l'esperienza propostami, sono nel mio apparecchio bolometrico, come in quello termometrico, soddisfatte con così buona approssimazione come nelle migliori esperienze del genere.

Con questo voglio dire semplicemente che la dott. Kahanowicz con la sua critica non ha colto nel segno; non già che un critico più accorto e fortunato non possa a quelle mie esperienze fare appunti e magari proporre correzioni e ritocchi, o piuttosto che non vi siano cause di errori che sfuggirebbero al critico essendo sfuggite a me stesso in molti mesi di accurato lavoro.

Per parte mia rileggendo dopo cinque anni quel mio lavoro vi trovo da fare qualche osservazione e da apportare una correzione (del resto di entità assai piccola), la quale consiste nell'abolire una correzione che un più attento esame mi ha mostrata non necessaria, e che quindi ha servito a introdurre anzi che a togliere un piccolo errore. Di che cosa si tratta espongo minutamente in una Nota che mando al Nuovo Cimento, e qui mi limito a dire che il risultato finale ne viene portato da $5.96 \,.\, 10^{-12}$ a $6{,}01 \,.\, 10^{-12}$ (watt. cm^{-2}. gradi C^{-4}) con una differenza così piccola che lascia il risultato di questa mia determinazione al suo posto d'ordine nella serie assai numerosa e discordante delle determinazioni di σ.

Potrei dire che essa migliora l'accordo con la mia determinazione termometrica con la quale non riuscii che a stabilire la disuguaglianza $6{,}0 < \sigma < 6{,}3$ con le stesse unità. Ma se insistessi su questo punto potrebbe parere che io voglia attribuire ai miei risultati una attendibilità maggiore che a quelli di altri e provetti sperimentatori; il che non ho mai avuto intenzione di fare.

Fisiologia. — *Contributo allo studio della soluzione fisiologica per i tessuti del Bombyx mori e della funzione del vaso pulsante* [1]. Nota del prof. Luciano Pigorini [2], presentata dal Corrisp. Lo Monaco.

In una Nota presentata recentemente al R. Istituto Veneto di scienze e lettere, ho reso conto, come sia possibile mantenere lungamente in vita l'intestino asportato dalla larva di Bombyx mori e immerso in soluzione 0,8 % di cloruro sodico purchè si provveda ad un continuo gorgoglio di aria attraverso la soluzione. Ho detto come mi proponessi di continuare l'interessante studio delle soluzioni saline adatte al mantenimento in vita dei tessuti della larva, specialmente tenendo conto della reazione, sapendosi che l'emolinfa ha reazione fortemente acida.

Non ho creduto di iniziare questo studio servendomi del preparato del tubo digerente per l'ovvia ragione della complicazione fornita dalla presenza delle sostanze alimentari e del succo gastrico, fortemente alcalino; ed ho preferito tentare il preparato del vaso pulsante, soddisfacendo così anche ad un altro mio desiderio di addentrarmi cioè un poco nella conoscenza tuttora estremamente manchevole della fisiologia di quest'organo.

Struttura del vaso pulsante. — Senza entrare in particolari di struttura che non sono necessarî a quanto si espone nel corso di questa Nota, ci basti accennare come, secondo quanto risulta dalle ricerche di Verson, mentre non è ancora tutto trascorso il primo periodo di vita larvale, le pareti del vaso pulsante appariscono già in tutta la loro estensione sostanzialmente composte di tessuto muscolare striato [3].

Tecnica delle esperienze. — La preparazione del vaso pulsante viene così eseguita. Immobilizzata la larva — qualche rara volta presa sul finire della quarta età, quasi sempre di quinta età — con narcosi eterea, fissatala su una tavoletta di sughero con dei piccoli spilli, incisa la pelle in corrispondenza dell'apertura anale e introdotta una sonda scanalata, sulla guida di questa si taglia a tutto spessore la pelle e lo strato muscolare sottostante lungo la linea mediana ventrale. Arrovesciati all'esterno i lembi cutaneo-muscolari e fissatili, la tavoletta di sughero è tenuta alzata e capovolta con

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione bacologica sperimentale in Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1917.

(3) E. Verson, *Sul vaso pulsante della sericaria.* Atti Ist. ven. sc. lett., LVII, parte 2ª, 1907-908, e Ann. R. Staz. Bac. Padova, 36, pp. 17-49. Vedere la figura dei cardioblasti alla tavola II, fig. 16.

una mano, mentre con l'altra si recidono a uno a uno i ciuffi di trachee che imbrigliano l'intestino e i seritteri. Questi organi pel loro peso si vanno così lentamente staccando dagli altri senza che avvengano rotture o lacerazioni, particolarmente a danno del delicatissimo vaso pulsante il quale resta scoperto, ben visibile e agevolmente aggredibile. Tutto il preparato, insieme con la tavoletta di sughero immerso nelle soluzioni saline attraverso le quali gorgoglia aria e delle quali un termometro indica la temperatura, è osservato con l'aiuto del microscopio binoculare, con ingrandimento di 9 o 16 diametri.

Le soluzioni usate furono soluzioni di Ringer eventualmente modificate come si dirà di volta in volta.

Soluzione di Ringer originale. — In una esperienza alla temperatura di 22,5° C. il preparato del vaso sopravvisse circa un'ora e mezzo, in una seconda circa 3 ore. Cade qui in acconcio di osservare come non sia sempre facile decidere della morte del vaso pulsante propriamente detto. Nei preparati più felicemente riusciti, il vaso pulsante appare come un tubo trasparente, emergente dal lembo cutaneo-muscolare in tutto il suo percorso o quasi. È agevole allora constatare le variazioni di diametro dovute ai successivi movimenti di diastole e sistole. Ma se, come accade in larve presso a maturità, il vaso rimane più o meno immerso nel tessuto adiposo sviluppatosi rigogliosamente, non si può sempre stabilire con esattezza se i movimenti che si osservano sieno dovuti alle contrazioni proprie della parete del tubo o degli organi muscolari (« alette ») che ad esso si accollano. Così avvenne in questa seconda esperienza nella quale veramente una cessazione di ogni movimento non si osservò che dopo tre ore e tre quarti.

Soluzione di Ringer con 0,8 °/₀ di cloruro sodico. — Risultando dalle ricerche di Ducceschi [1] che la pressione osmotica dell'emolinfa del baco corrisponde a una soluzione di NaCl = 0,790 °/₀ ho voluto saggiare la riduzione del contenuto di cloruro sodico nel liquido di Ringer, che, come si sa, è del 0,9 °/₀. In una esperienza eseguita osservai la sopravvivenza del preparato per 2 ore e 40 minuti circa.

Soluzione di Ringer con 0,7 °/₀ di cloruro sodico. — Il preparato sopravvisse oltre 2 ore e un quarto.

Soluzione di Ringer senza bicarbonato sodico. — Tenendo presente l'acidità dell'emolinfa del baco cominciai col saggiare l'effetto della soppressione del bicarbonato e in una delle esperienze in cui il preparato riuscì felicemente, la sopravvivenza fu superiore alle ore cinque e un quarto.

Soluzione di Ringer senza bicarbonato sodico e acidificata. — Nazari ha determinata l'acidità dell'emolinfa corrispondente a 0,46 °/₀ di acido

[1] Nazari e Ducceschi, *Il sangue del* **Bombyx mori** *allo stato larvale.* Atti d. R. Acc. dei Georgofili, 1902, XXV, disp. 3-4.

ossalico. Era logico supporre che l'aggiunta di acidi al liquido di Ringer — s' intende senza bicarbonato sodico — dovesse migliorare le condizioni offerte da detto liquido ai tessuti della larva che vi fossero immersi. L'esperienza diede un risultato del tutto inatteso e contrario all'aspettazione.

a) *Acidificazione del liquido di Ringer con acido formico.* — Dice il Ducceschi che secondo Poulton l'acidità dell'emolinfa è dovuta ad un acido volatile e forse all'acido formico. Ebbene, l'aggiunta di acido formico al liquido di Ringer nella preparazione di 1 : 5000 induce istantanea morte nel preparato. In soluzione 1 : 10000 un preparato visse 10 minuti, e finalmente solo in soluzione 1 : 20000 un'ora e mezzo. L'acido formico si è mostrato cioè assai tossico. È da notare che per azione dell'acido formico 1 : 10000 in luogo della loro lucentezza e diafanità i tessuti si presentano alla fine bianco-opachi in superficie, assai verosimilmente per coagulazione delle proteine.

b) *Acidificazione con acido acetico.* — L'acido acetico fu istantaneamente letale alla diluizione 1/1000 e 1 : 2000, rapidissimamente letale all'1 : 5000. All' 1 : 10000 lasciò in vita un preparato per circa un'ora, e all' 1 : 15000 per circa due ore; insomma si dimostrò anch'esso assai tossico. Trovo nei miei appunti che all'1 : 2000 i tessuti divengono bianchi opachi.

c) *Acidificazione con acido ossalico.* — Nei tubi Malpighiani si trova come prodotto di escrezione molto ossalato di calcio. Ho quindi voluto saggiare anche l'acido ossalico. Una prova alla diluizione di circa 1 : 6700 ha lasciato sopravvivere un preparato per meno di 18 minuti (T = 24,5), un'altra prova alla diluizione 1 : 10000 ha lasciato sopravvivere un altro preparato per circa un'ora (T = 24,5).

Anche l'acido ossalico quindi s'è dimostrato tossico.

Aggiunta di sali di manganese e di rame al liquido di Ringer. — Si sa che manganese e rame compaiono sovente in quantità tutt'altro che trascurabili nei liquidi dell'organismo degli invertebrati.

Perciò, in vista della parte che prendono nei processi di ossidazione, ho voluto provare ad aggiungerli al liquido di Ringer, senza bicarbonato. Il cloruro di manganese all'1 : 2000 ha ucciso un preparato in meno di 20 minuti; all'1 : 10000 ne ha lasciato sopravvivere uno per oltre un'ora e tre quarti. In altri termini s'è dimostrato tossico.

Il solfato di rame fu immediatamente letale, all'1 : 5000. All'1 : 10000 uccise un preparato in 9 minuti, all'1 : 20000 in tre quarti d'ora circa e all'1 : 40000 ne lasciò sopravvivere meno di 1 ora. È però necessario rilevare che nei due casi erano ioni di manganese e rame che venivano a contatto cogli elementi cellulari, e che perciò non si può estendere il giudizio di questa forte tossicità ai sali in cui sieno presenti ioni composti dei rispettivi metalli o più ancora a composti organici complessi.

Aggiunta di urea al liquido di Ringer. — Dalle esperienze di Stefani risulta che l'urea esercita una azione, e precisamente dilatatrice, sui vasi sanguigni. Secondo le ricerche di Baglioni l'urea rappresenta per la vitalità dei tessuti dei selaci (e precisamente le esperienze del Baglioni furono eseguite sul cuore) una condizione chimica specifica indispensabile [1]. Per questi due fatti ho voluto saggiare se l'aggiunta dell'urea portasse a qualche visibile effetto. Aggiunta in proporzione del 5 p. m. al liquido di Ringer — senza bicarbonato — essa lasciò funzionare un preparato per oltre due ore e mezzo e un altro per circa 3 ore e tre quarti. E cioè per i tessuti (vaso pulsante) della larva di B. mori, l'urea non appare rappresentare una sostanza tossica nè una sostanza favorevole o necessaria alla loro vitalità.

Aggiunta di glicosio al liquido di Ringer. — Nel liquido di Locke, simile a quello di Ringer, è presente l' 1 : 1000 di glicosio. La stessa quantità di glicosio aggiunta al liquido di Ringer — senza bicarbonato — mi ha permesso di osservare la sopravvivenza di un preparato di cuore di B. mori per tre ore e tre quarti, non dimostrando cioè nessun effetto particolare. L'esperienza non è stata più ripetuta.

Separazione del vaso pulsante dal sistema nervoso centrale. — A questo scopo la tecnica di preparazione del vaso pulsante è così modificata. Le larve sono fissate su un fianco anzichè sul dorso e il taglio dell'integumento muscolo cutaneo è fatto seguendo la linea degli stigmi. Si arrovesciano così ai due lati due lembi cutaneo-muscolari dei quali uno comprende il vaso pulsante, l'altro tutta la catena ganglionare. Una fila di piccoli spilli viene infissa fra il vaso pulsante e la catena ganglionare. Accertata la buona funzione del preparato con un bisturi ben affilato si fanno tre tagli: con uno si asporta la testa e la porzione prossimale del torace, con un secondo, eseguito fra la fila di spilli e la catena ganglionare ventrale, si asporta tutta questa catena, col terzo infine l'estremità caudale. La buona fissazione con spilli permette di evitare stiramenti e lesioni del vaso pulsante. L'esperienza eseguita quattro volte diede lo stesso risultato: e cioè che le contrazioni del vaso pulsante continuano indisturbate.

Dunque le pulsazioni del vaso o sono di origine cosiddetta miogena automatica, o sono dovute allo stimolo proveniente da centri nervosi diffusi nell'organo, centri dei quali finora ignoriamo la presenza.

Divisione del vaso pulsante in segmenti. — In due dei preparati testè descritti ho proceduto al taglio trasverso del vaso pulsante. In entrambi i casi i due monconi anteriore e posteriore hanno continuato a pulsare, dimostrando così una indipendenza funzionale da segmento a segmento.

[1] Stefani, *Contrib. alla fisiol. d. cuore e d. vasi.* Memorie R. Acc. Lincei. Roma, 1916, vol. XI, fasc. 12. Baglioni, *I prod. ultimi (urea) d. metab. azot. nei selaci.* Atti d. I. Congr. Naz. d. Pesca. Milano, 1903.

Riassumendo: risulta per ora da queste esperienze:

1) che il liquido di Ringer originale si presta alla sopravvivenza dei tessuti (vaso pulsante) del B. mori allo stato larvale:

2) che meglio appare prestarsi se non contenga bicarbonato sodico;

3) che l'aggiunta ad esso di acidi è perniciosa e che di essi solo traccie minime vengono sopportate;

4) che dannosa è l'aggiunta di sali di manganese e rame nei quali sieno presenti gli ioni dei rispettivi metalli;

5) che indifferente è l'azione di urea o di glicosio;

6) che il vaso pulsante funziona anche sottratto all'azione del sistema nervoso centrale;

7) che i suoi singoli segmenti sono capaci di funzionare indipendentemente.

Da queste conclusioni nascono due problemi di fondamentale interesse. Il primo: quello della spiegazione del singolare fenomeno per il quale i tessuti del B. mori — e probabilmente sarà lo stesso per gli altri insetti — mentre prosperano *in vivo* nell'emolinfa acidissima muoiono *in vitro* per tracce minime di acidi aggiunti alle soluzioni fisiologiche; il secondo: quello di stabilire la presenza o meno di elementi nervosi nella parete del vaso pulsante.

Appare infine sempre più meritevole di studio la formazione e la presenza di urea nei tessuti liquidi del baco, urea che dalle ricerche eseguite finora non sembra esistere nei prodotti di escrezione.

Batteriologia. — *Sull'attività biochimica dei bacteri agglutinati.* Nota del dott. AMILCARE ZIRONI [1], presentata dal Corrispondente G. GALEOTTI [2].

Non vi ha dubbio che i microrganismi in genere si sviluppino benissimo in un mezzo di coltura liquido, contenente un siero specifico capace di agglutinarli. Mano a mano che essi si riproducono, vengono agglutinati in fiocchi, che cadono al fondo, mentre il terreno di coltura rimane limpido. Il Bandi (che ha utilizzato questo fenomeno di *agglutinazione allo stato nascente*) crede che anzi, in queste condizioni, la moltiplicazione dei bacteri sia maggiore, quasi per una difesa della specie bacterica contro l'anticorpo.

Non si sa però, se i bacteri, che crescono agglutinati, conservino immutate le loro attività biochimiche, e su questo argomento ho fatto le seguenti ricerche.

[1] Dal Laboratorio bacteriologico di Muscoli.

[2] Pervenuta all'Accademia il 23 giugno 1917.

Ho sperimentato sovratutto col bacillo paratifico B, ed anche col vibrione del colera.

Delle loro reazioni chimiche ho studiato:

A) la produzione di acidi;

B) la produzione di CO_2;

C) la riduzione del bleu di metilene.

A) — *Produzione di acidi.*

Si preparano tubi contenenti esattamente 10 cc. di brodo glucosato (1 %) e nella metà di essi si aggiunge siero agglutinante per il paratifo B, fino alla diluizione voluta. Negli altri tubi, che restano per controllo, si aggiunge (affinchè tutte le condizioni siano identiche) siero non agglutinante. Si innestano tutti i tubi, in modo identico, col bacillo paratifico B e poi si tengono nel termostato per varî periodi di tempo, come nella tabella è indicato; quindi si titola l'acidità delle intiere colture con soluzione $n/10$ di KOH e usando la fenolftaleina come indicatore.

Raccolgo nella tabella seguente i dati di questi esperimenti:

Ore di permanenza nel termostato	Diluizione del siero (1) nella coltura	Cm³ di KOH adoperati per neutralizzare ciascuna coltura
3	1/100	b. agglutinati 0.14, 0.14, 0.18, 0.14, 0.14
		b. non agglutinati (controlli) 0.10, 0.14, 0.14, 0.14, 0,14
5	1/600	b. agglutinati . . . 0.40, 0.50, 0.50, 0.50, 0.40, 0.50
		b. non agglutinati . . 0.60, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50, 0.40
10	1/600	b. agglutinati 2.08, 2.44, 2.28, 2.38, 2.34
		b. non agglutinati 2.04, 2.18, 2.34, 2.36, 2.04
12	1/600	b. agglutinati 2.56, 2.54, 2.70, 2.80, 2.76
		b. non agglutinati 2.60, 2.60, 2.56, 2.50, 2.50
12	1/600	b. agglutinati 2.15, 1.95, 2.10, 2.30
		b. non agglutinati 2.00, 2.00. 2.20, 2.35
15	1/100	b. agglutinati 2.28, 2.08, 2.24, 1.96. 1.98
		b. non agglutinati 2.38, 2.30, 2.36, 2.40, 1.40
24	1/300	b. agglutinati 4.94, 4.96, 5.06
		b. non agglutinati 5.20, 5.06
24	1/600	b. agglutinati 5.08. 5.06
		b. non agglutinati 4.98

(1) Il siero è attivo a 1/1000.

Dalle cifre sovra esposte risulta chiaramente, che non vi è differenza nella produzione di acidi fra le colture con bacilli agglutinati e le colture con bacilli non agglutinati.

Lo stesso resultato si ebbe anche in altre prove, che per brevità non riporto, nelle quali fu aumentata la permanenza delle colture in termostato, fino a 30 e a 48 ore.

Altri esperimenti ancora furono fatti in egual modo, con i vibrioni del colera, coltivati in acqua peptonata e addizionata di glucosio, o di maltosio, o di amido solubile.

Al solito, in alcune provette, si aggiungeva una piccola quantità di siero agglutinante ad alto potere; in altre, per controllo, si aggiungeva la stessa quantità di siero inattivo. Riporto i dati di quattro di questi esperimenti, fatti con 25 cmc. di terreno di coltura glucosato:

Ore di permanenza in termostato	Diluizione del siero (1) nella coltura	Cm³ di KOH $n/10$ adoperati per neutralizzare ciascuna coltura
8	1/1500	b. agglutinati . . . . 2.00 b. non agglutinati (controlli) 2.00
8	1/3000	b. agglutinati . . . . 1.80 b. non agglutinati 2.16
24	1/1500	b. agglutinati . . . . 4.00 b. non agglutinati 4.80
24	1/3000	b. agglutinati . . . . 4.40 b. non agglutinati 5.50

E qui debbo accennare, incidentalmente, ad un fatto non privo di interesse, che ho osservato in questi esperimenti sul colera, e cioè che la produzione di acidi, restando eguali tutte le altre condizioni, è alquanto diversa, a seconda dell'altezza dello strato in cui il terreno liquido si trova, e precisamente è maggiore se il liquido è in più alto strato. Con tutta probabilità questo fatto dipende dalla quantità di ossigeno, che può entrare nel terreno di coltura, e si può avanzare l'ipotesi, che il vibrione del colera produca quantità maggiori di acidi, quando scarseggia l'ossigeno.

B) — *Produzione di* CO_2.

Per questi esperimenti mi son servito di un apparecchio, che credo opportuno descrivere, perchè può essere utile anche per altre ricerche.

(1) Il siero è attivo a 1/6000.

Si tira alla lampada il fondo di una grossa e corta provetta *A*, nella forma disegnata nella fig. 1. In questa provetta capovolta si introduce un piccolo tubo di coltura *B*, contenente circa 10 cc. di brodo glucosato e di già insemenzato. Si chiude la bocca della provetta con un buon tappo di sughero o di gomma *D*, attraversato da un tubo di vetro *EF*, piegato a branche disuguali.

Fig. 1.

Per l'apertura *F* di questo tubo si versa olio di vaselina, finchè raggiunga il livello *G*. Intanto il tubo capillare *C* deve essere aperto, ma, introdotta la quantità necessaria di olio, si chiude questo tubo alla lampada. Si comprende facilmente che lo sviluppo di CO_2 dalla coltura fa innalzare l'olio nel tubo *EF*. Misurando su di una scala, attaccata a questo tubo, tali innalzamenti, si può determinare la produzione del gas.

Si intende bene che tutto l'apparecchio deve restare immerso in un bagno a temperatura costante, adatta allo sviluppo del microrganismo studiato. Solo l'apertura *F* deve emergere.

Se si vuol determinare con ogni esattezza la quantità di CO_2 sviluppata, si deve calibrare con cura il tubo *EF*, misurare la quantità d'aria iniziale contenuta nella provetta al di sopra del livello *G*, e fare le opportune correzioni, tenendo conto delle variazioni di pressione determinate dall'innalzamento dell'olio nel tubo *F* e degli eventuali cambiamenti barometrici.

Ma per ricerche comparative non vi è bisogno di tutto ciò. Se si hanno due apparecchi perfettamente eguali, basta tener conto dell'innalzamento dell'olio nell'uno e nell'altro e confrontare i valori ottenuti.

Così ho fatto in questi miei esperimenti: in un apparecchio collocavo una coltura di bacillo paratifico B in brodo glucosato, addizionata di siero agglutinante nelle proporzioni già scritte, nell'altro un'identica coltura, addizionata di un siero inattivo.

Ho seguìto gli spostamenti dell'olio nei tubi di ambedue gli apparecchi, per molte ore di seguito, alla temperatura di 37° e non ho trovato differenze apprezzabili nell'uno e nell'altro caso.

Cosicchè posso affermare, che la produzione di CO_2, per opera di bacilli paratifici B, è eguale, tanto se i bacilli crescono agglutinati, quanto se non ha luogo l'agglutinazione.

C) — *Riduzione del bleu di metilene.*

La riduzione del bleu di metilene (scoloramento) è, in certe condizioni, considerata come una reazione prettamente biologica. Per i miei esperimenti ho proceduto così: in piccoli tubi da saggio versavo una certa quantità di brodo colorato col bleu di metilene, e poi in alcuni aggiungevo ancora, nelle solite proporzioni, siero agglutinante per il paratifico B; negli altri, per controllo, mettevo eguali quantità di siero inattivo. Tutti i tubi erano identicamente insemenzati col b. paratifico B e sul brodo veniva stratificato olio di paraffina sterile per lo spessore di 1 cm. Collocavo quindi queste colture nel termostato, esaminando di ora in ora le modificazioni del colore. Risultò, che tanto le provette, in cui si sviluppavano i bacilli agglutinati, quanto le provette di controllo, si decoloravano con eguale rapidità. Anche questa reazione chimica non è dunque influenzata dalla agglutinazione dei bacteri che la producono.

Conclusione.

Da questi esperimenti risulta, che lo stato di agglutinazione dei bacteri non modifica le loro proprietà biochimiche generali.

Inoltre, poichè le quantità dei prodotti delle reazioni chimiche dei bacteri, sono eguali tanto nelle colture agglutinate quanto in quelle non agglutinate, resta confermato che l'agglutinazione non modifica neppure l'attività moltiplicatrice dei bacteri stessi.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 1° Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 7-10.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 4.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-5.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 2.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 2°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sulle superficie secondarie nei sistemi tripli ortogonali pseudosferici.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

1. Scopo delle pagine seguenti è di caratterizzare *geometricamente*, nei sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di superficie pseudosferiche, di raggio costante o variabile, le superficie delle altre due serie, che si diranno per abbreviare le superficie *secondarie* di questi sistemi [2].

Partiamo perciò dal seguente problema geometrico:

Problema A) — *Trovare tutte le coppie* (S, S') *di superficie che, senza essere fra loro parallele, si corrispondono punto per punto in guisa che le loro linee di curvatura si corrispondano; inoltre i segmenti* MM' *che ne uniscono i punti corrispondenti abbiano tutti la stessa lunghezza e siano ortogonali alle linee di curvatura di un sistema di* S, *e per ciò anche alle corrispondenti di* S'.

Si vedrà che l'esistenza, per una superficie S, di una seconda superficie S' nella relazione descritta è caratteristica per le superficie S secondarie nei sistemi tripli ortogonali pseudosferici. Ne segue che ogni tale superficie S possiede non una soltanto, ma una *doppia infinità* di superficie trasformate S', le quali appartengono, come è evidente, alla medesima classe.

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1917.

[2] Nelle mie antiche ricerche: *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten* [Annali di matematica, serie 2ª, tomo XIII (1885)] la questione, ora trattata in generale, è risoluta soltanto pel caso dei sistemi dl Weingarten *a flessione costante.* Le superficie secondarie in questi sistemi sono caratterizzate dal possedere un sistema di linee di curvatura colla medesima flessione costante.

2. Si supponga data una superficie S, che riferiamo alle sue linee di curvatura (u, v), mantenendo le consuete notazioni: x, y, z per le coordinate del punto M mobile sopra S, e (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) pei coseni di direzione del triedro principale. Avremo le formole fondamentali:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\, X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_3, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_1 \\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_2,
\end{aligned}
\right.
$$

colle analoghe per gli altri due assi, ed i raggi principali di curvatura r_1, r_2 saranno legati ai coefficienti E, G del ds^2 dalle formole di Codazzi

$$
(\alpha)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.
$$

e dall'equazione di Gauss

$$
(\beta)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2}.
$$

Supposto che esista una seconda superficie S', che formi con S una coppia soddisfacente alle condizioni del problema A), indichiamo con x', y', z' le coordinate del punto M' variabile su S', e sia a la lunghezza costante dei segmenti MM', i quali si supporranno ortogonali alle linee di curvatura $v = \text{cost.}$; avremo

$$
(2)\qquad x' = x + a(\cos\theta\, X_2 + \operatorname{sen}\theta\, X_3),
$$

colle analoghe, avendo indicato con $\theta = \theta(u, v)$ l'angolo d'inclinazione del segmento MM' sulla linea $v = \text{cost.}$ Essendo escluso il caso di una coppia (S, S') di superficie parallele, *l'angolo θ non sarà un angolo retto*, e la funzione $\theta = \theta(u, v)$ dovrà essere tale che risultino soddisfatte le condizioni seguenti:

1°) *le linee (u, v) sopra S' siano ortogonali*;

2°) *esse siano inoltre coniugate.*

Per esprimere queste condizioni cominciamo dal derivare le (2) rapporto ad u, v ed osservando le (1) troveremo:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \left(\sqrt{E} + \dfrac{a}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + a\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta\right)X_1 + \\ \qquad\qquad + a\dfrac{\partial\theta}{\partial u}(-\operatorname{sen}\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3) \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = -\dfrac{a}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta\, X_1 + \left\{\sqrt{G} - a\operatorname{sen}\theta\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}\right)\right\}X_2 + \\ \qquad\qquad + a\cos\theta\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}\right)X_3\,. \end{cases}$$

Introduciamo, come seconda funzione incognita $\sigma = \sigma(u, v)$, l'angolo σ che formano fra loro le tangenti in punti corrispondenti alle due linee $v = \text{cost}$ di S, S', ed *escludiamo per ora il caso che l'angolo σ sia retto*, caso singolare che sarà trattato a parte (n. 8). Dovremo avere

$$S X_1 \frac{\partial x'}{\partial u} = \cos\sigma \sqrt{S\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2}\,,$$

il che dà per la (3_1)

$$(a)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u} = \operatorname{tg}\sigma\left\{\frac{\sqrt{E}}{a} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + \frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta\right\},$$

indi pei coseni di direzione X'_1, Y'_1, Z'_1 delle tangenti alla $v = \text{cost}$ sopra S'

$$(4)\qquad X'_1 = \cos\sigma\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma(-\operatorname{sen}\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3)\,,$$

colle analoghe.

La prima condizione enunciata porta che si abbia

$$S X'_1 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0\,.$$

ossia per la (3)

$$(b)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} + \frac{\cot\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta + \frac{\sqrt{G}}{a}\operatorname{sen}\theta\,.$$

Indicando similmente con X'_2, Y'_2, Z_2 i coseni di direzione della tangente alla $u = \text{cost}$ sopra S', avremo dalla (3_2), osservando la (b):

$$(5)\qquad X'_2 = -\frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \sqrt{G}(\cos\theta\, X_2 + \operatorname{sen}\theta\, X_3) + \\ + \frac{a\cot\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(-\operatorname{sen}\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3)\,,$$

colle analoghe, il segno $\equiv$ significando eguaglianza a meno di un fattore comune di proporzionalità nelle tre formole.

Dalle (4), (5) seguono poi subito pei coseni di direzione X'_3, Y'_3, Z'_3 della normale S' le formole:

$$(6)\qquad X'_3 \equiv \sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\sigma\, X_1 + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\mathrm{sen}\,\sigma}(\cos\theta\, X_2 + \mathrm{sen}\,\theta\, X_3) + \sqrt{G}\cos\sigma\,(\mathrm{sen}\,\theta\, X_2 - \cos\theta\, X_3)\,.$$

3. Venendo ora alla seconda delle condizioni enunciate, che le linee u, v siano coniugate sopra S', questa potrà esprimersi coll'equazione:

$$(7)\qquad S\, X'_3 \frac{\partial X'_1}{\partial v} = 0\,.$$

Ma dalle (4), derivando rapporto a v celle (1), ed osservando la (5) e la (6), abbiamo

$$\frac{\partial X'_1}{\partial v} = -\frac{\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta}{a}X'_2 + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\left\{-\mathrm{sen}\,\sigma\, X_1 + \cos\sigma\,(-\mathrm{sen}\,\theta\, X_2 + \cos\theta\, X_3)\right\},$$

e per ciò la (7), avendosi $S\, X'_2 X'_3 = 0$, resta semplicemente $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = 0$, onde segue che σ è una funzione della sola u: *L'angolo σ che formano fra loro le tangenti in punti corrispondenti alle linee di curvatura* $v = \mathrm{cost}$ *sopra* S, S' *deve rimanere invariabile lungo le linee di curvatura* $u = \mathrm{cost}$ *dell'altro sistema.*

Raggiunto questo primo risultato, prendiamo le equazioni differenziali (a), (b) cui deve soddisfare la funzione $\theta = \theta(u, v)$, ed avremo il sistema:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \mathrm{tg}\,\sigma\left\{\dfrac{\sqrt{E}}{a} + \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\mathrm{sen}\,\theta\right\} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{r_1} + \dfrac{\cot\sigma}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{G}}{a}\mathrm{sen}\,\theta\,, \end{cases}$$

dove è da ricordarsi che $\sigma = \sigma(u)$ è funzione di u soltanto, la cui derivata si indicherà con $\sigma'(u)$. Ora si formi la condizione d'integrabilità della (I) derivando la prima rapporto a v, la seconda rapporto ad u, e sottraendo con riguardo alle (I) stesse ed alle formole (α) di Codazzi. Omettendo i termini che si distruggono, resta:

$$\mathrm{tg}\,\sigma\cos\theta\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) - \cot^2\sigma\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{\sigma'\cos\sigma}{\mathrm{sen}^3\sigma}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\} = 0\,.$$

Il fattore $\operatorname{tg}\sigma\cos\theta$ non può annullarsi nelle nostre ipotesi, e deve quindi eguagliarsi a zero la quantità fra parentesi $\{\ \}$, ciò che per l'equazione (β) di Gauss, si traduce nella equazione equivalente

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{a^2}\sqrt{EG}-\frac{\sigma'\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0. \tag{8}$$

Ponendo

$$U=\frac{a}{\operatorname{sen}\sigma}, \tag{9}$$

sarà U una funzione della sola u, e la (8) prenderà la forma definitiva:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\sqrt{EG}}{U^2}+\frac{U'}{U}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0 \quad \left(U'=\frac{dU}{du}\right). \tag{A}$$

4. Così per le superficie S, che risolvono il problema A), è trovata quale condizione *necessaria* la (A), a cui debbono soddisfare gli elementi della S, riferita alle linee di curvatura (u, v). Proviamo ora che questa condizione (A) è altresì sufficiente; anzi, quando sia soddisfatta, esisterà non una soltanto, ma una doppia infinità di superficie S', ciascuna delle quali formerà con la S una coppia (S, S') del problema A).

E infatti, valendo la (A) con U funzione di u soltanto, si calcoli secondo la (9) un angolo $\sigma=\sigma(u)$ dalla relazione

$$\operatorname{sen}\sigma=\frac{a}{U},$$

dove per a si prenderà una costante qualunque [1].

I calcoli stessi eseguiti al n. 3 dimostrano che il sistema differenziale (I) per la funzione incognita $\theta=\theta(u, v)$ è *completamente integrabile*; per ciò il suo integrale generale $\theta=\theta(u, v, c)$ conterrà, oltre la a, una nuova costante arbitraria c.

Scelta una tale soluzione $\theta(u, v, c)$ delle (1), le formole (2) daranno una superficie S' che formerà con S una delle coppie richieste.

È poi evidente che la relazione fra S, S' è reciproca, e per ciò la S' apparterrà alla sua volta alla medesima classe (A), ed ammetterà quindi ∞^2 superficie trasformate, fra le quali la S primitiva, e così via.

In fine si osservi che il sistema differenziale (I), prendendo per incognita $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$, assume la forma di Riccati. E nella applicazione ripetuta delle trasformazioni alle superficie della classe (A) vale al solito un *teorema di permutabilità*, sicchè basta integrare completamente la *prima* equazione di

[1] Affinchè σ sia reale bisognerà però che, almeno in un tratto di variabilità per u, sia $|a|<|U|$.

Riccati, e le successive si integrano allora in termini finiti. Tutto ciò risulterà ricondotto a proprietà note dei sistemi tripli ortogonali pseudosferici stabilendo i teoremi di cui al num. seguente.

5. Dimostriamo che: *ogni superficie S della classe (A) è una superficie secondaria in un sistema triplo ortogonale pseudosferico.* Per questo ricerchiamo il grado di arbitrarietà delle superficie S della classe (A), rifeendoci alle formole della rappresentazione sferica. Poniamo colle notazioni usuali

$$H_1 = \sqrt{E}\ ,\ H_2 = \sqrt{G}\ ,\ h_1 = \frac{\sqrt{E}}{r_2}\ ,\ h_2 = \frac{\sqrt{G}}{r_1}\ ,$$

e introduciamo inoltre le *rotazioni*

$$\left\{\begin{aligned} \beta_{12} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u} \\ \beta_{21} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\ . \end{aligned}\right.$$

Il sistema differenziale caratteristico per le superficie della classe (A) prende la forma

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial h_2}{\partial u} = \beta_{12} h_1\ ,\ \frac{\partial H_2}{\partial u} = \beta_{12} H_1\ ,\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u} = -\frac{H_1 H_2}{U^2} - \frac{U'}{U}\beta_{12} \\ &\frac{\partial h_1}{\partial v} = \beta_{21} h_2\ ,\ \frac{\partial H_1}{\partial v} = \beta_{21} H_2\ ,\ \frac{\partial \beta_{21}}{\partial v} = \frac{H_1 H_2}{U^2} + \frac{U'}{U}\beta_{12} + h_1 h_2\ , \end{aligned}\right.$$

dove U sarà pensata come una funzione assegnata di u.

I teoremi generali per l'esistenza degli integrali dei sistemi differenziali assicurano che, per *individuare* una soluzione

$$(h_1\ ,\ h_2\ ;\ H_1\ ,\ H_2\ ;\ \beta_{12}\ ,\ \beta_{21})$$

del sistema (II), si possono assegnare *ad arbitrio* le tre funzioni di v cui si riducono *per* $u = 0$

$$h_2\ ,\ H_2\ ,\ \beta_{12}\ ,$$

e così pure ad arbitrio le tre funzioni di u cui si riducono per $v = 0$

$$h_1\ ,\ H_1\ ,\ \beta_{21}\ \text{[1]}.$$

Questo si interpreta geometricamente così:

[1] Si osservi che nel sistema (II) non figurano derivate nei secondi membri. I teoremi d'esistenza si applicano quindi nella massima generalità *nel campo reale,* sotto le sole condizioni di continuità per la funzione U e per le funzioni iniziali assegnate.

Per individuare una superficie S *della classe* (A) *basta assegnare, ad arbitrio, due sue linee di curvatura* C , Γ, *diciamo* $v=0$, $u=0$, *che si taglino ortogonalmente in un punto* O.

E infatti se prendiamo, per semplicità, a parametri u , v gli archi delle curve C , Γ, contati a partire da O, avremo

$$H_1=1 \ , \quad \text{per} \quad v=0$$
$$H_2=1 \ , \quad \text{per} \quad u=0 \ ,$$

e l'arbitrarietà che resta nelle altre funzioni

$$h_1(u\,,0) \ , \ \beta_{21}(u\,,0) \quad ; \quad h_2(0\,,v) \ , \ \beta_{12}(0\,,v)$$

permette appunto, ed in un sol modo, di dare alle curve $v=0$, $u=0$ della S le forme prescritte C , Γ.

Se ora per ciascuna linea di curvatura $u=\text{cost}$ della superficie S, così individuata, facciamo passare la superficie pseudosferica di curvatura $=-\dfrac{1}{U^2}$ che taglia lungo questa linea ortogonalmente la S, i teoremi sulle caratteristiche dei sistemi tripli pseudosferici [1] dimostrano che le ∞^1 superficie pseudosferiche costruite formeranno una famiglia di Lamé, e per ciò la superficie S sarà una superficie secondaria nel sistema, come si è enunciato.

6. Consideriamo ora il caso particolare notevole che si ottiene dai risultati generali precedenti quando per la funzione arbitraria U si prenda una costante k. L'equazione caratteristica (A) diventa ora

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\sqrt{EG}}{k^2}=0 \, ,$$

ed il sistema triplo ortogonale pseudosferico individuato da una superficie S di questa classe conterrà superficie pseudosferiche tutte dello stesso raggio k. Dunque: *l'equazione* (B) *caratterizza le superficie secondarie nei sistemi pseudosferici di Weingarten.*

Si osservi che dalla (B) segue l'altra

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+\frac{G}{k^2}\right\}=0 \, ,$$

onde avremo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+\frac{G}{k^2}=V^2 \, ,$$

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 430.

con V funzione della sola v. Cangiando il parametro v, possiamo fare $V = 1$, e porre quindi

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \cos\omega \quad , \quad \frac{\sqrt{G}}{k} = \operatorname{sen}\omega ,$$

dove ω è un angolo ausiliario. Così abbiamo

$$\sqrt{E} = k \frac{\partial \omega}{\partial u} \quad , \quad \sqrt{G} = k \operatorname{sen}\omega ,$$

e l'elemento lineare, riferito alle linee di curvatura, delle superficie secondarie nei sistemi di Weingarten prende quindi la forma *caratteristica*

$$(10) \qquad ds^2 = k^2 \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 du^2 + \operatorname{sen}^2 \omega \, dv^2 \right\} .$$

Se di una tale superficie S consideriamo le ∞^1 superficie S' trasformate che si ottengono fissando per l'angolo σ un valore costante qualunque $\left(\text{diverso però da } \frac{\pi}{2}\right)$ e prendendo, secondo la (9)

$$a = k \operatorname{sen}\sigma ,$$

è chiaro che le linee di curvatura $v = \text{cost}$ delle ∞^1 superficie S' corrispondenti ad una medesima $v = \text{cost}$ di S saranno tracciate sulla superficie canale di raggio a, avente per asse questa linea di S, e ne taglieranno i circoli sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

7. Veniamo da ultimo al caso fin qui escluso $\sigma = \frac{\pi}{2}$, nel quale tuttavia le proprietà geometriche delle superficie della classe (B) si mantengono come proprietà limiti. Intanto nella costruzione geometrica testè indicata le ∞^1 curve derivate da una curva $v = v_0$ della S si contraggono in un'unica curva, in generale con due rami distinti Γ_1, Γ_{-1}, che formano lo spigolo di regresso (reale od immaginario) della superficie canale [1]. Proveremo che in effetto le due superficie della classe S_1, S_{-1}, luogo di questi due rami Γ_1, Γ_{-1}, sono due superficie della classe (B), colle linee u, v per linee di curvatura. Il passaggio dalla S alle due contigue (a destra e a sinistra) S_1, S_{-1} corrisponde alla *trasformazione complementare* dei sistemi di Weingarten [2]. La sua ripetuta applicazione fa nascere dalla S, senza calcoli d'integrazione, una serie discreta, estesa all'infinito nei due sensi, di superficie della classe (B)

$$(11) \qquad \ldots\ldots S_{-2}, S_{-1}, S, S_1, S_2 \ldots ,$$

(1) Cfr. *Lezioni*, vol. I, § 13.
(2) Cfr. *Lezioni*, vol, II, § 445.

ciascuna superficie della serie avendo per complementari le due contigue a destra e a sinistra.

Stabiliamo le proprietà enunciate, anzi con maggiore generalità, risolvendo il seguente problema:

B) *Data una superficie* S, *si considerino le* ∞^1 *superficie canali di raggio fisso* $=k$, *che hanno per assi curvilinei le linee di curvatura* $v=cost$ *di un sistema sopra* S, *e su ciascuna di queste i due rami* Γ_1, Γ_{-1} *(reali od immaginarii) dello spigolo di regresso. Quando avviene che la superficie* S_1 *(o la* S_{-1}*) luogo del ramo* Γ_1 *(o di* Γ_{-1}*) abbia queste curve per linee di curvatura?*

Proveremo che questo accade per tutte *e sole* le superficie S della classe (B), verificandosi del resto la proprietà per ambedue i rami dello spigolo di regresso [1].

8. Riprendiamo i calcoli al piucipio del n. 1 ponendovi $\sigma=\frac{\pi}{2}$, $a=k$, ciò che riduce la condizione

$$SX_1 \frac{\partial x'}{\partial u}=0,$$

alla equazione in termini finiti per θ

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\theta+\frac{\sqrt{E}}{r_2}\operatorname{sen}\theta+\frac{\sqrt{E}}{k}=0. \tag{12}$$

Questa ci dà due valori distinti per θ (reali o immaginarii) e bisogna ora ricercare, scelto uno di questi valori per θ, le ulteriori condizioni affinchè sulla superficie S', definita dalle formole

$$x'=x+k(\cos\theta X_2+\operatorname{sen}\theta X_3),$$

le linee $v=\text{cost}$ siano linee di curvatura.

Avendosi qui

$$X'_1=-\operatorname{sen}\theta X_2+\cos\theta X_3 \tag{13}$$

e inoltre

$$\frac{\partial x'}{\partial v}=-\frac{k}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\theta X_1+\sqrt{G}\,X_2+k\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)X'_1,$$

[1] Nel caso particolare delle superficie S con linee di curvatura in un sistema a flessione costante $\frac{1}{k}$, i due rami dello spigolo di regresso si riuniscono nella curva luogo dei centri di curvatura e la serie (11) si riduce a due sole superficie S, S_1 in relazione involutoria.

ne deduciamo

$$(14)\qquad X_3' = \Omega \left\{ \sqrt{G}\, X_1 + \frac{k}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} (\cos\theta X_2 + \operatorname{sen}\theta X_3) \right\},$$

avendo posto

$$(15)\qquad \frac{1}{\Omega^2} = G + \left(\frac{k}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2 .$$

Esprimiamo che le linee $v =$ cost sono di curvatura per la S' colle proporzioni

$$(16)\qquad \frac{\partial X_3'}{\partial u} : \frac{\partial Y_3'}{\partial u} : \frac{\partial Z_3'}{\partial u} = X_1' : Y_1' : Z_1' .$$

Bisogna dunque intanto che eseguendo colle (1) la derivata $\frac{\partial X_3'}{\partial u}$, a derivazione eseguita venga a mancare nel secondo membro della (14) il termine in X_1, ciò che dà l'equazione

$$\sqrt{G} \frac{\partial \Omega}{\partial u} + k \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} \cos\theta + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{E}}{k} \right\} = 0,$$

ossia per la (12) semplicemente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0 .$$

Questa, per la (15), equivale a

$$(17)\qquad \frac{k^2}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\sqrt{EG}}{k^2} \right\} = 0 .$$

nella quale il fattore esterno non può annullarsi, perchè se $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0$, ne seguirebbe

$$X_3' = X_1 \;,\quad \frac{\partial X_3'}{\partial u} = - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_3$$

e dalle proporzioni (16) avremmo

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\theta \frac{\sqrt{E}}{r_2} = 0 ,$$

ciò che contraddice alla (12). Dunque nella (17) dovrà annullarsi il secondo fattore, cioè: *ogni superficie* S *soluzione del problema* B) *appartiene necessariamente alla classe* (B) *caratterizzata da*

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\sqrt{EG}}{k^2} = 0 .$$

Ma inversamente, supposta soddisfatta questa, indi anche la $\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0$, si verifica facilmente che sussistono le proporzioni (16), e quindi le linee $v =$ cost sulla S' sono in effetto linee di curvatura. Così la proprietà enunciata alla fine del n. 7 è stabilita.

Come ulteriore conferma, si osservi che dalla (B) segue l'altra

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) = \sqrt{EG}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{r_1 r_2}\right),$$

onde, derivando la (12) rapporto a v, deduciamo

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \operatorname{sen}\theta\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\sqrt{EG}}{k}\cos\theta\right).$$

D'altra parte la (12) può anche scriversi

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \operatorname{sen}\theta\right) \cdot \sqrt{G} \operatorname{sen}\theta = -\left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\sqrt{EG}}{k}\cos\theta\right),$$

e paragonando risulta

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} + \frac{\sqrt{G}}{k}\operatorname{sen}\theta\,. \tag{18}$$

Dunque la θ tratta dalla (12) soddisfa alla equazione differenziale (18), alla quale si riduce appunto la (b) n. 2 per $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $a = k$. Questa esprime, come si è visto, che le linee (u, v) formano sulla S' un sistema ortogonale che, per essere inoltre coniugato, coincide con quello delle linee di curvatura.

Matematica. — *Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi.* Nota del Corrispondente F. Enriques [1].

1. Prendiamo le mosse dal problema fondamentale della teoria delle singolarità delle curve piane: determinare i punti multipli successivi di un ramo dato mediante la rappresentazione parametrica

$$x = t^{\nu} \quad , \quad y = at^{\nu'} + bt^{\nu''} + \cdots \tag{1}$$

Questo problema si lascia risolvere coll'uso di successive trasformazioni quadratiche (Nöther) o con analisi algebrica diretta, come ho accennato nella mia Nota del 7 maggio 1916; il resultato è che « i punti successivi del ramo, colle loro molteplicità, vengono pôrti dal procedimento per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri ν, ν', ν'' ... ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1917.

Conviene presentare quest'analisi sotto un altro aspetto, che indichi la possibilità di una generalizzazione, relativa al caso delle superficie che abbiamo in vista.

Anzitutto il nostro problema fondamentale si riferisce a sviluppi in *serie*, che vengono forniti dal teorema di Puiseux; ma, poichè l'analisi dipende soltanto da un numero finito di termini delle serie anzidette, è lecito surrogare le *serie* con *polinomi*. Così, sostituendo alla curva data una curva razionale che l'approssimi convenientemente lungo un ramo, siamo condotti a ricercare « i punti multipli successivi di una curva razionale

$$(2) \qquad x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)} \quad , \quad y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)} \, ,$$

considerata nell'intorno d'un suo punto $t = t_0$. Anzi la forma particolare degli sviluppi di Puiseux permette di prendere qui

$$\varphi_3(t) = 1 \quad , \quad \varphi_1(t) = t^\nu \, ;$$

particolarizzazioni semplificatrici, ma — del resto — non essenziali.

Si indichi con φ la curva rappresentata dalle formule (2), con n il suo ordine (che sarà dato dall'ordine del polinomio φ_2), e con O l'origine delle coordinate x e y, cioè il punto di essa che risponde al valore $t = 0$ del parametro, cui spetta per la curva la molteplicità ν $(\nu \leq \nu' < \nu'' \ldots)$.

I punti multipli successivi della curva φ, infinitamente vicini al punto O, si possono mettere in evidenza come segue:

1) anzitutto, il punto proprio O, di molteplicità ν, appare colla stessa molteplicità sulla curva piana φ e sopra una φ_r, trasformata di φ (appartenente ad uno spazio di $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni) mediante il sistema delle curve piane d'ordine r (> 1);

2) in secondo luogo il punto O_1 di φ, successivo ad O, appare come punto proprio, colla molteplicità che gli compete, sopra la curva φ_r' proiezione di φ_r fatta da O su un generico iperpiano;

3) ancora il punto successivo O_2 appare come punto proprio sulla curva φ_r'' proiezione di φ_r' da O_1, e così di seguito. Essendo r abbastanza alto si esaurisce così la successione dei punti multipli di φ, trovandosi — da un certo momento in poi — sempre punti semplici.

Ora, la serie delle operazioni geometriche che abbiamo descritta, si traduce in un semplice procedimento algebrico. Infatti la curva φ viene rappresentata sulla retta t (asse del parametro t) dalla serie lineare g_n:

$$\lambda_1 t^\nu + \lambda_2 \varphi_2(t) + \lambda_3 = 0 \, ,$$

e la φ_2 è rappresentata sulla medesima retta dalla serie r-pla di codesta g_n^2, ad es. per $r=2$, dalla

$$\Phi_2 = \lambda_{11} t^{2\nu} + 2\lambda_{12} t^{\nu} \varphi_2(t) + 2\lambda_{13} t^{\nu} + \lambda_{22} \varphi_2^2(t) + 2\lambda_{23} \varphi_2(t) + \lambda_{33} = 0 .$$

Posto

$$\varphi_2(t) = at^{\nu'} + bt^{\nu''} + \cdots$$

con

$$\nu < \nu' < \nu'' \ldots ,$$

la presenza dei punti multipli successivi $O, O_1, O_2 \ldots$ della curva φ, si rivela nell'esame della serie lineare Φ_2, come segue:

1) il punto ν-plo O risponde alla circostanza che t^{ν} comparisce come massimo divisore comune di tutti i termini della Φ_2, eccetto il termine costante λ_{33}:

2) fatto $\lambda_{33} = 0$ (con che si ottiene un sistema lineare ∞^4 entro il sistema ∞^5 di tutte le Φ_2), si divida per t^{ν}, e si cerchi quindi la massima potenza di t che divida quattro Φ_2 linearmente indipendenti (e non una Φ_2 fuori del sistema di quelle): codesta potenza sarà t^{ν} o $t^{\nu'-\nu}$ e il fattore corrispondente darà luogo ad un punto O_1 di φ, la cui molteplicità è rispettivamente ν o $\nu' - \nu$;

3) questo procedimento si prosegue (rispetto a Φ_1 o — se occorre — a una Φ_r con $r > 2$): la serie dei punti successivi della curva φ, colle rispettive molteplicità, vien pôrta dalla serie delle potenze di t che compaiono come divisori, ciascuna delle quali divide h Φ linearmente indipendenti entro un sistema di dimensione h.

Esaminando gli esponenti che figurano nelle indicate potenze, appare che essi sono: anzitutto i resti delle divisioni successive per la ricerca del massimo comun divisore fra ν e ν', poi gli analoghi resti nell'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore di ν'' e di m. c. d. (ν, ν'), e così di seguito.

2. In ciò che precede abbiamo indicato un nuovo modo di giustificare l'analisi dei punti successivi d'un ramo di curva piana, dato mediante la sua rappresentazione parametrica. Ora è interessante osservare come il procedimento spiegato sia suscettibile d'estensione. Anzitutto codesto procedimento vale indipendentemente dall'ipotesi particolare

$$\varphi_3(t) = 1 \quad , \quad \varphi_1(t) = t^{\nu} ,$$

e, quando si abbiano polinomi φ_2 e φ_3 qualunque, l'analisi assume già l'aspetto generale che s'incontra nella ricerca dei *punti successivi di un ramo di curva gobba*, estendibile a curve di uno spazio con un numero arbitrario di dimensioni [1].

[1] Cfr. la mia Nota del 15 aprile 1917.

Pongasi

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= at^\nu + a_1 t^{\nu'} + \cdots \\ \varphi_2(t) &= bt^\mu + b_1 t^{\mu'} + \cdots \\ \varphi_3(t) &= c \quad + c_1 t^\lambda + \cdots , \end{aligned}$$

dove tutti i coefficienti designati sono diversi da zero. Quando si forma la serie Φ_r, p. es. la g^5_{2n}:

$$\Phi_2 = \lambda_{11}\varphi_1 + 2\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 + 2\lambda_{13}\varphi_1\varphi_3 + \lambda_{22}\varphi_2^2 + 2\lambda_{23}\varphi_2\varphi_3 + \lambda_{33}\varphi_3^2 = 0 ,$$

appare un termine $\lambda_{33}\varphi_3^2$ che non è divisibile per t; ma, posto $\lambda_{33}=0$, si ottengono cinque Φ_2 indipendenti che ammettono uno dei divisori t^ν, t^μ, sicchè il più piccolo fra i due numeri ν, μ, designa la molteplicità del punto O per la curva

$$(\varphi) \qquad x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)} \ , \quad y = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)} .$$

Ora, se p. es. $\nu < \mu$, la molteplicità del punto successivo O_1 verrà data dal più piccolo fra i numeri: $\nu' - \nu$, $\mu - \nu$, λ, corrispondentemente alla massima potenza di t che apparirà come divisore di quattro Φ_2 linearmente indipendenti (in cui $\lambda_{13}=0$).

Così potremo proseguire l'analisi che porge i punti multipli successivi della curva φ: le molteplicità di questi dipenderanno sempre dai più piccoli resti ottenuti nel nostro processo di sottrazioni, che è una generalizzazione dell'algoritmo euclideo per la ricerca del massimo comun divisore, dove si ha da operare su gruppi di numeri di cui non è dato un ordine.

3. Dalle curve passiamo alle superficie.

In due Note presentate all'Accademia delle Scienze di Bologna, il 7 maggio 1916 e il 19 maggio 1917, ho indicato la possibilità di rappresentare approssimativamente una falda di superficie nell'intorno d'un punto singolare O mediante funzioni razionali, che saranno in generale del tipo:

$$(\varphi) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\theta(uv)\,.\,\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)} \\ y &= \frac{\theta(uv)\,.\,\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)} \\ z &= \frac{\theta(uv)\,.\,\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)} ; \end{aligned} \right.$$

qui si suppone che φ_4 non contenga alcun fattore comune ai numeratori delle x, y e z, e si ha da studiare l'intorno del punto O sulla superficie φ, corrispondentemente all'intorno della curva $\theta(uv)=0$ nel piano (uv).

Potrà accadere, del resto, che la θ si scinda in più fattori (polinomi in u, v):

$$\theta = \theta_1^\nu \theta_2^\mu \ldots$$

Ora i *punti multipli appartenenti alla superficie* φ *nell'intorno di* O *potranno corrispondere*:

a) a *curve del piano* che, facendo parte dell'intorno di θ, dovranno essere *componenti di* θ;

b) e a *punti* o *gruppi di punti* ([1]).

La ricerca dei punti multipli della specie *a*) dà luogo ad un *procedimento di divisioni successive di polinomi*, che è l'immediata estensione di quello innanzi descritto per la ricerca concernente le singolarità delle curve. Il procedimento a cui accenniamo verrà spiegato, per semplicità di discorso, nel caso in cui θ sia *irreducibile* e le φ_1, φ_2, φ_3 non abbiano altro divisore comune.

Si consideri il sistema Φ_r multiplo, secondo un numero r abbastanza elevato, del sistema lineare di curve piane

$$|\varphi| = \lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_2 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 ;$$

si potrà scrivere simbolicamente:

$$|\Phi_r| = (\lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_2 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4)^r ,$$

cioè

$$|\Phi_r| = |\Phi_1|^r = |\varphi|^r ,$$

e si avranno

$$N_r = \frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{6}$$

curve Φ_r linearmente indipendenti; fra queste Φ_r, $N_r - 1$ (corrispondenti all'annullamento del coefficiente rappresentato simbolicamente da λ_4^r) risulteranno divisibili per θ. Eseguita la divisione, si cercherà ancora di determinare, ove esista, un sistema lineare di dimensione $N_r - 3$ di $\Phi_r \theta$ (contenente θ come fattore fisso, cioè $N_r - 2$ Φ_r indipendenti) divisibili per θ^2, e così di seguito.

Il procedimento avrà termine, giacchè si troverà certo un numero s tale che θ^{s+1} non divida $N_r - (s+1)$ Φ_r indipendenti (e se ciò accade per un r per cui $N_r > s+1$, lo stesso accadrà per valori più grandi di r). Infatti l'ordine delle curve Φ_r vale nr, n designando l'ordine delle curve φ_r, cioè cresce proporzionalmente ad r; invece l'ordine di θ^s è is, i designando

([1]) La distinzione è relativa al modo particolare della rappresentazione, poichè una trasformazione birazionale su u e v vale a cambiare un punto in una curva, che tuttavia possiederà i noti caratteri delle curve *eccezionali*.

l'ordine di θ, e però cresce proporzionalmente ad s; d'altra parte s è vincolato ad una diseguaglianza rispetto ad N_r, dove quest'ultimo numero cresce come il cubo di r; ma se θ^s deve dividere una Φ_r, bisogna che sia

$$is \leq nr,$$

e quindi la possibilità della divisione deve arrestarsi — appena si abbia un r un po' grande — per un s piccolo rispetto a N_r.

Abbiamo spiegato il precedimento che vale a determinare i punti multipli *a*) della superficie φ, vicini ad O, riferendoci al caso in cui il sistema lineare

$$\lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_3 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 = 0$$

possegga una curva fondamentale irreducibile θ. Ora è chiaro che le cose dette si estendono al caso di θ *riducibile*: si avrà ancora da ricercare la divisibilità delle nostre

$$\Phi_r = (\lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_2 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4)$$

per polinomi che saranno da scegliere fra i divisori di θ. Soltanto potrà ora occorrere di considerare diverse serie di divisioni, corrispondentemente al caso che si trovino — a partire da O sulla superficie φ — diverse successioni di punti multipli infinitamente vicini.

4. Oltre ai punti multipli *a*) della superficie φ, appartenenti all'intorno del punto O e rispondenti a curve (fondamentali) del piano (uv), si hanno ancora da ricercare i punti multipli *b*) che rispondono a punti o gruppi di punti del detto piano. Meglio che una discussione minuta, vale qui l'esame di alcuni esempî notevoli, i quali avranno anche una certa importanza generale, come avviamento al problema della *classificazione dei punti doppî uniplanari* delle superficie;

Nel seguito supporremo in generale che il punto singolare O della superficie φ corrisponda ad una *curva fondamentale irreducibile* del sistema $|\varphi|$ nel piano rappresentativo (uv); codesta curva verrà designata, come innanzi, con θ.

Avremo:

1) Una *prima classe di punti doppî*, corrisponde all'ipotesi che dopo avere staccato la θ da φ, θ non sia più fondamentale per il sistema residuo $|\varphi'|$. In questo caso la θ sarà una curva iperellettica intersecata secondo coppie variabili della g_2^1 dalle curve di $|\varphi'|$ (solo nel caso che θ sia di genere zero si possono avere, su θ, le coppie di una g_2^2: allora O è un punto conico ordinario per la superficie φ). Designando con π *il genere della* θ $(\pi > 0)$, avremo *su una sezione piana generica per* O *un tacnodo di specie* π, imperocchè lo staccamento di θ dalle curve di $|\varphi|$ abbassa il

genere precisamente di $\pi + 1$, secondo la nota formula che dà il genere delle curve spezzate.

Ai *punti doppî* della nominata g'_2 su θ rispondono direzioni per O che dànno sezioni piane cuspidate, e quindi $2\pi + 2$ *punti doppî successivi alla curva doppia infinitesima circondante* O.

Rientrano come casi particolari nella nostra prima classe di punti doppî, alcuni casi in cui *la θ si spezza*, segnatamente il caso in cui essa si riduca ad una curva razionale doppia.

Il punto cuspidale ordinario, O, di una superficie φ del terz'ordine, corrisponde a un sistema di cubiche piane passanti per tre punti in linea retta con tangenti fisse: a codesti punti base rispondono i tre punti doppî vicini ad O.

Un punto doppio O con sezioni cuspidate di 2ª specie si presenta sulla superficie del 4° ordine (φ) come caso particolare del tacnodo, e si costruisce come segue.

Si assuma anzitutto una quartica $\theta = C_4$ con due punti doppî A_1 e A_2, e si fissino su di essa 6 punti $B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ B_6$: le curve di 8° ordine passanti per $A_1^4\ A_2^4\ B_1^2\ B_2^2\ B_3^2\ B_4^2\ B_5^2\ B_6^2$, segano su C_4 le quaterne di una g_4^3; fissando una quaterna di punti base semplici $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$, otterremo un sistema lineare ∞^3 di curve $|\varphi|$, di genere 3 e grado 4, avente la curva fondamentale θ, staccando la quale si trova una rete residua composta delle quartiche per $A_1^2\ A_2^2\ B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ B_6$. (Si avverta che il sistema $|\varphi|$ si deduce — con una trasformazione quadratica — da un sistema di sestiche con 7 punti base doppî e 4 semplici sopra una cubica fondamentale). Ora, si faccia degenerare la θ in una conica contata due volte, $\theta = C_2^2$, e assumiamo su questa: i punti $A_1\ A_2$, che saranno base quadrupli per le curve φ d'ordine 8; i punti $B_1\ B_2\ B_3$, in cui le φ dovranno avere dei tacnodi con tangenti fisse; e, finalmente, i punti base semplici P_1 e P_2, ove le φ dovranno avere tangenti fisse. Il sistema $|\varphi|$ rappresenterà una superficie del 4° ordine con un punto singolare O, tale che le sezioni piane per esso saranno cuspidi di 2ª specie; si avranno per O tre direzioni singolari corrispondenti a $B_1\ B_2\ B_3$, secondo le quali si trovano tre punti doppî della superficie infinitamente vicini alla retta doppia infinitesima che circonda O.

2) *Una seconda classe di punti doppî* uniplanari, si ottiene nel caso che la θ possa staccarsi *due* volte dal sistema $|\varphi|$ (e dai suoi multipli). Allora non è più vero in generale che il genere di θ uguagli la specie delle sezioni (tacnodali) della superficie φ.

L'esempio più semplice di punti doppî della seconda classe si ottiene come segue. Si considerino le cubiche di un fascio passanti per 8 punti dati $A_1\ A_2 \ldots A_8$ e le ∞^6 curve di 9° ordine che ne costituiscono il sistema triplo, passando per $A_1^3\ A_2^3 \ldots A_8^3$. A codeste curve di 9° ordine s'imponga di avere un punto doppio P sopra una cubica θ del fascio $(A_1 \ldots A_8)$; si avrà così

un sistema lineare ∞^3 di curve φ, avente — di conseguenza — un altro punto base semplice P' sopra θ: il genere del sistema $|\varphi|$ così costruito sarà 3, il suo grado varrà 4: staccando la curva fondamentale θ si avrà un sistema residuo di sestiche (passanti per P e quindi per un altro punto fisso di θ) di genere 2 e di grado 2. Pertanto il nostro sistema $|\varphi|$ rappresenta un punto doppio di una superficie del 4° ordine; singolarità notevole che abbassa soltanto di *uno* il genere delle sezioni piane, ma pure abbassa il genere della superficie, riducendola razionale (Nöther).

L'esempio anzidetto si può generalizzare come segue.

Si consideri una quartica θ di genere due, dotata di un punto doppio M, o sopra θ si assumano 10 punti semplici, affatto generici, $A_1 A_2 \ldots A_{10}$. Le curve d'ordine 12 passanti per $M^6 A_1^3 A_2^3 \ldots A_{10}^3$ formano un sistema lineare di dimensione 9; s'imponga ad esse di possedere due punti doppî P_1 e P_2, assegnati in posizione generica sopra θ, si otterrà così un sistema $|\varphi|$ di dimensione 3, avente — di conseguenza — due punti base semplici Q_1 e Q_2 sopra θ: il genere di $|\varphi|$ vale 8, il suo grado pure 8. Ora, staccando la curva fondamentale θ da $|\varphi|$ (che possiede i punti base $M^6 A_1^3 \ldots A_{10}^3 P_1^2 P_2^2 Q_1 Q_2$) si ottiene un sistema residuo $|\varphi'|$ di curve di 8° ordine, per $M^4 A_1^2 \ldots A_{10}^2 P_1 P_2$, contenente — di conseguenza — altri due punti base semplici R_1 e R_2 su θ; il genere di $|\varphi'|$ varrà 5 e il suo grado 6. Appare così che la superficie φ (d'ordine 8), rappresentata dal sistema $|\varphi|$, possiede un punto doppio O che abbassa di 3 il genere delle sezioni piane, le quali possiederanno dunque un tacnodo di specie due; la retta doppia infinitesima che circonda O (cui succede un'altra retta doppia infinitesima) verrà rappresentata dalla serie delle coppie di punti coniugati appartenenti agli intorni di R_1 e R_2.

Ora, vicino ad O, si trova un punto doppio O_1 rappresentato sul piano dalla medesima curva θ di genere due; le sezioni piane di φ per i due punti $O\, O_1$ sono date dalle quartiche per $M^2 A_1 \ldots A_{10}$, e così appare che anche il punto doppio O_1 abbassa di 3 il genere delle sezioni per esso.

. . . .

i) *La classe* i^{ma} *di punti doppî* corrisponde all'ipotesi che la curva θ fondamentale per $|\varphi|$ si possa staccare, come fondamentale, dai sistemi successivi. L'esistenza di punti doppî siffatti resulta già provata generalizzando il primo degli esempî precedenti, come segue.

Si considerino le curve d'ordine $3i+3$ passanti per 8 punti $A_1^{i+1} A_2^{i+1} \ldots A_8^{i+1}$, queste curve segano sopra una cubica θ per $A_1 \ldots A_8$ una serie lineare g_{i+1}^i e formano un sistema lineare di dimensione

$$1 + 2 + \cdots + (i+1) = \frac{(i+2)(i+1)}{2}.$$

Imponiamo a codeste curve di avere su θ un punto i-plo P; si otterrà così un sistema $|\varphi|$ dotato di un altro punto base semplice P′, sistema di dimensione $i+1$, di genere i e di grado $2i+1$.

Staccando la θ si ha un sistema residuo di curve d'ordine $3i$ passanti per $A_2^i \dots A_8^i$, P^{i-1}, e quindi per un altro punto semplice fisso su θ; il genere si è abbassato di 1, il grado di 2, la θ rimane curva fondamentale; e così successivamente per i volte (compresa la prima).

Al sistema $|\varphi|$, o ad un generico sistema ∞^3 contenuto in esso, risponde una superficie φ che possiede un punto doppio uniplanare di classe i.

Lo studio dell'argomento potrà essere utilmente proseguito: la presente Nota non mira tanto a porgere risposta esauriente ad un problema quanto ad aprire una via di ricerca ai giovani studiosi.

Meccanica. — *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio GIAN ANTONIO MAGGI [1].

In una sua recentissima Nota [2] il prof. G. A. Maggi ha molto opportunamente rilevato l'assetto ormai raggiunto dalla teoria delle distorsioni elastiche: tanto più opportunamente in quanto che il definitivo precisarsi dei limiti di questa teoria è la condizione essenziale perchè si possa sperare di dare finalmente un certo assetto alle nostre idee anche nei confronti di altri stati di coazione elastica che non sono suscettibili di venir classificati nè tra le ordinarie deformazioni della teoria classica, nè tra le moderne distorsioni.

In realtà passano oggi sotto il nome di distorsioni tutti quegli stati di equilibrio elastico che si stabiliscono in assenza di ogni qualsiasi azione esterna, e che si possono intendere generati praticando nel solido un taglio, di forma e posizione arbitraria, imprimendo alle due faccie del taglio degli spostamenti relativi piccolissimi, e risaldando poi tra loro tali due faccie, dopo di aver naturalmente riempiti con nuovo materiale gli spazii vuoti che nello spostamento si fossero prodotti, ed asportata una conveniente porzione di materia là dove lo spostamento stesso tendesse invece a determinare sovrapposizioni di parti.

Io non so se il Weingarten, cui è dovuto il concetto informatore di questa teoria, l'avesse intravista con una maggiore generalità: la cosa è

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 giugno 1917.

[2] G. A. Maggi, *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª vol. XXVI (1° sem. 1917).

però per lo meno possibile. Egli scriveva infatti a suo tempo in questi stessi Rendiconti [1]:

« Nella teoria dell'equilibrio dei solidi elastici si è considerato fino ad « ora, mi sembra, soltanto il caso di un corpo le cui particelle subiscono « degli spostamenti dalla loro posizione naturale, i quali variano da punto « a punto con continuità in tutto lo spazio occupato dal corpo stesso. In « tali ipotesi se non agisce nessuna forza esterna, nè sul contorno nè entro « lo spazio interno, il corpo non è soggetto a tensioni interne.

« Non pertanto esistono certamente dei corpi soggetti a tensioni interne « i quali non sono sottoposti a forze esterne nè sul contorno nè all'interno.

« Per averne un esempio basta immaginare un anello non del tutto « chiuso di cui si avvicinino le due sezioni libere e piane attaccandole « l'una all'altra con uno strato infinitamente sottile che le saldi insieme ».

Questo esempio del Weingarten, non il concetto più generale espresso nelle linee precedenti e che con esso egli intendeva illustrare, domina però incontestabilmente nel seguito della breve Nota citata: lo stesso esempio continua in sostanza a dominare in tutti gli studî a cui quella Nota ha dato lo spunto.

È ben vero che quell'esempio si è mostrato alla prova fecondo oltre ogni legittima aspettazione, e, attraverso l'opera magistrale del Volterra [2], ha in breve volgere d'anni fatto posto ad una delle più eleganti teorie della moderna fisica matematica.

Le più recenti ricerche del Somigliana [3] hanno però dimostrata l'opportunità di conferire la maggiore generalità alla trattazione, abbandonando tutte quelle restrizioni che non sono rigorosamente necessarie, cioè che non sono imposte in modo assoluto da alcuna considerazione di indole meccanica.

Ora, una volta messi su questa via, occorre, a parer mio, andare fino in fondo, e chiedersi addirittura se l'artificio stesso dei tagli e delle successive risaldature delle loro faccie spostate, a cui si ricorre per generare le distorsioni, sia suscettibile di tutta la desiderabile generalità: se cioè con esso si possano effettivamente giustificare *tutti* i sistemi di tensioni interne che l'esperienza quotidiana ci presenta nei solidi elastici in equilibrio in assenza di forze esterne.

Il dubbio viene suggerito dall'esame di quegli stati di coazione elastica a cui ho accennato in principio, la cui esistenza è ben nota ai tecnici, ma

[1] J. Weingarten, *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª vol. X (1° sem. 1901).

[2] V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Annales de l'Ecole Normale, 3, XXIV (septembre 1907).

[3] C. Somigliana, *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª vol. XXIII (1° sem. 1914). *Sulle discontinuità dei potenziali elastici*. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 51 (giugno 1916).

che, malgrado qualche isolato tentativo di trattazione [1], non hanno ancor trovato il loro posto nella teoria matematica dell'elasticità.

Ecco un esempio tra i più caratteristici: un pezzo di acciaio riscaldato a temperatura sufficientemente elevata viene improvvisamente portato a contatto di corpi freddi. L'improvviso e disuguale raffreddamento delle varie sue parti produce allora una contrazione di volume diversa da punto a punto. Le parti del pezzo che si raffreddano più rapidamente acquistano in breve tempo una consistenza maggiore, la quale non permette poi loro di seguire senza reazione i fenomeni di ritiro che si determinano nelle altre parti del pezzo man mano che queste vanno alla lor volta raffreddandosi.

Tutto ciò è comprovato da una quantità di fatti che si verificano regolarmente nelle operazioni di tempra degli acciai, quali la diminuzione di densità dei pezzi temprati (tanto maggiore quanto più grande è stata la velocità di raffreddamento) ed i cambiamenti di forma che nei pezzi stessi si osservano in dipendenza da ogni difetto di uniformità nel processo di raffreddamento [2].

Quanto alle tensioni interne che si vengono così a creare nel pezzo temprato è assai difficile metterle in evidenza direttamente: si può però considerare come una prova della loro esistenza la facilità con cui nei pezzi di acciaio temprati si verificano delle rotture improvvise ed impreviste, a volte sotto l'azione di sollecitazioni che per se stesse sarebbero assolutamente insufficienti a vincere la resistenza propria del materiale, a volte anche senza nessuna causa apprezzabile [3]. È poi notevole che questa specie di fragilità caratteristica dei pezzi temprati scompare (insieme del resto con la diminuzione di densità a cui si è dianzi accennato) se alla tempra si fa seguire una opportuna ricottura con successivo raffreddamento abbastanza lento perchè si possa ritenere praticamente uniforme.

Fatti assolutamente analoghi si verificano nella fusione dei pezzi in ghisa, nella presa dei getti in calcestruzzo [4], nella fabbricazione del vetro, ecc.

Il caso del vetro è particolarmente interessante, almeno dal punto di vista sperimentale, perchè in esso le tensioni interne possono venir messe in evidenza, e anche in certi casi misurate, per mezzo della doppia rifra-

[1] Cfr. ad es. A. Föppl, *Vorlesungen über Technische Mechanik*, Fünfter Band. Leipzig 1907.

[2] Cfr. ad es.: F. Reiser, *Théorie et pratique de la trempe de l'acier*, trad. franc. Paris, 1905.

[3] Cfr. la mia Nota, *Sopra un caso di frattura spontanea di un acciaio temprato*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 52 (gennaio 1917).

[4] Interessanti notizie su questo argomento sono state esposte al recente Congresso di Milano della Società Ital. per il progresso delle scienze dall'Ing. L. Luiggi nella sua conferenza su *L'evoluzione delle dighe per laghi artificiali in alta montagna*, Atti, nona riunione, Roma 1917.

zione accidentale che le accompagna. Ora sta il fatto che qualunque pezzo di vetro rivela in generale, all'esame colla luce polarizzata, la presenza di tensioni interne distribuite nei modi più complicati: tensioni le quali non si eliminano completamente se non dopo un'accuratissima ricottura ed un raffreddamento lentissimo in un ambiente mantenuto a temperatura quanto più possibile uniforme.

Ciò posto è facile rendersi conto della impossibilità di giustificare come distorsioni tutti questi stati di coazione elastica: riesce infatti in primo luogo evidente che la loro presenza non è in alcun modo in relazione col grado di connessione dello spazio occupato dal solido; e per altra parte non si vede, almeno esaminando la questione dal punto di vista fisico, la necessità di superficie di discontinuità del tipo di quelle che il Somigliana ha incontrate nello studio delle distorsioni dei solidi semplicemente connessi.

La ragione di questa apparente contraddizione tra i risultati dell'esperienza quotidiana e quelli delle ricerche teoriche a cui abbiamo accennato, deve, come ho già detto, ricercarsi nella preoccupazione costante, che domina tutte quelle ricerche, di precisare in ogni caso, cioè per ogni stato di tensione in esame, il modo con cui tale stato potrebbe venir riprodotto *meccanicamente*, e più precisamente mediante un'ordinaria deformazione del solido dato, quando esso fosse stato tagliato lungo certe superficie, opportunamente scelte caso per caso. Questa preoccupazione, se per una parte è giustificata dal vantaggio di ricondurre i nuovi problemi a termini il meno diversi che sia possibile da quelli caratteristici della teoria classica dell'elasticità, può d'altra parte esser la causa di una limitazione del campo delle nostre ricerche.

Perchè infatti il descritto meccanismo di generazione dello stato di tensione interna sia applicabile, occorre ovviamente che le deformazioni dei singoli elementi che costituiscono il solido derivino da un unico sistema di spostamenti *generalmente* continuo, il quale cioè non implichi soluzioni di continuità nè sovrapposizioni di materia se non in corrispondenza di quelle particolari superficie lungo le quali si intendono praticati i tagli. Ed è noto che questo concetto si traduce analiticamente nella condizione che le sei componenti della deformazione soddisfino ad una certa sestupla di equazioni alle derivate seconde, dette equazioni di congruenza o di Saint-Venant, in tutti i punti del solido, eccezion fatta al più per quelli che appartengono alle particolari superficie sopra ricordate.

Ora è questa condizione fisicamente necessaria? Evidentemente no.

Se infatti noi ci limitiamo a considerare l'intorno di un punto generico del solido come isolato ed indipendente dal resto, nulla ci impedisce di assumere un sistema comunque arbitrario di valori delle componenti della deformazione per rappresentare uno stato effettivamente realizzabile della particella considerata.

E se prescindiamo dal modo di generare la deformazione, nulla ci impedisce di pensare il solido costituito da tanti elementi, deformati come ora si è detto nel modo più generale, i quali si mantengano in un tale stato di coazione elastica per virtù della loro mutua connessione, per modo che non possano restituirsi tutti insieme al loro rispettivo stato naturale non deformato se non vengono prima distrutti i vincoli che a ciascuno di essi sono imposti dalla presenza di tutti gli altri.

In una prossima Nota io mi riservo di procedere ad un sommario esame dei caposaldi su cui potrebbe impostarsi una trattazione generale dell'argomento.

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione della corrente elettrica in una lamina metallica immersa in un campo magnetico.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA [1].

Il Corbino, valendosi della teoria elettronica, ha mostrato, come è noto Rend. di questa Accad., 1915), che la distribuzione della corrente elettrica in una lamina metallica piana, isotropa, immersa in un campo magnetico **H** ad essa normale, dipende da un potenziale V nel modo seguente:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} j_x = -\mathrm{K}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right) \\[2ex] j_y = -\mathrm{K}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right), \end{cases}$$

dove:

j_x, j_y rappresentano le componenti della densità di corrente,

K denota la conducibilità specifica della lamina immersa nel campo magnetico **H**.

Ora, siano ν il versore (vettore unitario) ed F la grandezza del vettore grad V $\left(\text{di componenti } \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)$; sia, inoltre, σ il versore del vettore di componenti $\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, -\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}$ (vettore che resulta normale al precedente).

Vogliamo mostrare che le equazioni (I) possono ottenersi (anzichè ricorrendo alla teoria elettronica) postulando i due seguenti principî:

1) *Il principio di Ohm nei riguardi del flusso di corrente attraverso le linee equipotenziali,* principio che si traduce nella formula

$$j_\nu = -\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \nu},$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1917.

dove j_ν denota la componente della densità di corrente sulla normale ν alla linea equipotenziale e dove, inoltre, K verrà supposta essere una grandezza (conducibilità specifica della lamina) dipendente soltanto dalla natura del metallo di essa lamina e dall'intensità del campo magnetico.

2) *Il principio di distorsione Hall-Corbino*, cioè

$$j_\sigma = -\lambda j_\nu ,$$

dove j_σ denota la componente della densità di corrente sulla tangente σ alla linea equipotenziale e dove, inoltre, λ verrà supposto essere un numero, nullo nel caso ordinario (assenza del campo magnetico **H**), dipendente soltanto dalla natura del metallo della lamina, dall'intensità del campo magnetico e (nei riguardi del segno) dall'essere destrorsa oppure sinistrorsa la terna costituita dai vettori $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\nu}$ e dal campo **H** (1).

La temperatura della lamina viene supposta implicitamente costante.

Per la dimostrazione del nostro asserto, intendendo che i versi sulle rette ν e σ siano quegli stessi dei vettori $\boldsymbol{\nu}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, si osservi la eguaglianza vettoriale

$$\mathbf{j} = j_\nu \boldsymbol{\nu} + j_\sigma \boldsymbol{\sigma} ,$$

dove $\mathbf{j}$ rappresenta la densità di corrente, e si tengano presenti i due suddetti principî. Avremo

$$\mathbf{j} = -K \frac{\partial V}{\partial \nu} (\boldsymbol{\nu} - \lambda \boldsymbol{\sigma}) .$$

Si osservi, poi, che

$$F = \frac{\partial V}{\partial \nu} .$$

Potremo, dunque, scrivere

$$\mathbf{j} = -K F (\boldsymbol{\nu} - \lambda \boldsymbol{\sigma}) ,$$

relazione vettoriale che compendia appunto le equazioni (I) del Corbino.

(1) Giova notare che, nel caso ordinario, taluni assumono come principio di Ohm l'insieme dei due principî, dei quali uno riguarda la misura del flusso attraverso le linee equipotenziali, l'altro l'orientazione della densità di corrente (normale, nel caso ordinario, alle linee equipotenziali). Anche in cotesto caso, però, in cui $\lambda = 0$, ci sembra che sarebbe opportuna la distinzione dei due principî.

Geologia. — *Echinidi mesozoici del Caracorum raccolti dalla « Spedizione italiana nell'Asia Centrale (1913-1914)* ». Nota del prof. G. Stefanini, presentata dal Socio C. De Stefani [1].

Le ricche collezioni adunate dai proff. O. Marinelli e G. Dainelli nel Caracorum durante la spedizione italiana nell'Asia Centrale [2] comprendono anche un certo numero di echinidi, dei quali i raccoglitori vollero cortesemente affidarmi lo studio, acquistandosi così un nuovo titolo alla mia riconoscenza.

Intralciato dalle attuali circostanze, questo studio è ancora incompleto; tuttavia le ricerche preliminari per ora compiute mi pongono già in grado di trarre alcune conclusioni interessanti, che giova frattanto rendere note pubblicamente.

Gli echinidi prima d'oggi rinvenuti nell'Asia Centrale e debitamente illustrati, erano così scarsi, che la loro citazione si può riassumere in poche righe.

Si tratta, in primo luogo, di una specie raccolta a Tersacàn nel Turchestan russo orientale e riferita dal Cotteau [3] al *Coraster Vilanovae*, cioè ad una specie del Senoniano spagnolo.

Altre 5 specie, due delle quali affini a due *Ciphosoma* già noti, un *Cassidulus* nuovo, un *Echinobrissus* ed un *Pygaulus* (?) non determinabili specificamente, erano in seguito raccolte nel Fergana (Turchestan russo meridionale) dal Faas [4], che le ha dipoi illustrate, attribuendole al Turoniano o al Senoniano.

Finalmente, ancora nel Fergana, Alexat raccolse una *Scutellina*, che J. Cottreau [5] ebbe a descrivere come specie nuova, deducendone, in base al genere, l'età terziaria di quelli strati, da altri attribuiti al Daniano.

Le ricerche bibliografiche sommariamente eseguite non mi hanno fornito per ora altre indicazioni, ove si eccettui qualche citazione sporadica,

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1917.

[2] Cfr. *Relazione preliminare sui lavori scientifici della spedizione De-Filippi al Karakorum (1913-1914)*, Riv. Geogr. ital., XXII, fasc. 6°, pp. 225-254.

[3] Cotteau G., *Sur deux échinodermes fossiles provenant de Thershakhan (Turkestan)*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, CVIII, n. 7 (8 fevr. 1889).

[4] Faas A., *To the knowledge of the Fauna of the Echinoids from the Cretaceous Depos. in Russian Turkestan.* I: *Description of some Forms found in the Prov. Fergana*, Mem. Com. géol., n. ser., livr. 49, 1908, 22 pag., 1 tav.

[5] Cottreau J. e Alexat, *Sur une Scutelline nouvelle de l'Asie centrale*, Bull. Soc. géol. France (4), VII, 1908, pp. 358-359, tav. V.

non suffragata da studî precisi e documentati, come quella di H. Douvillé (¹), che in strati calcarei da lui attribuiti al Turoniano, cita degli *Hemiaster* « vicinissimi ad *H. Grossouvrei* Gauth. e ad *H. cenomanensis* Cott. »; e quella del Middlemiss (²), che ricorda parimente degli echinidi (*Echinoconus* sp., *Micraster* sp.) nel Cretaceo, probabilmente Cenomaniano, del distretto di Hazara, tra il Cashmir occidentale e la parte meridionale del Pengiab.

Gli esemplari raccolti da Dainelli e Marinelli sommano a 120 e sono riferibili ad almeno 14 specie, repartite in 12 generi diversi. Come si vede, questo contributo supera di gran lunga, da sè solo, tutto quanto era noto finora delle echinofaune dell'Asia Centrale. Nessuna delle specie già segnalate nella regione vi è compresa.

Faccio seguire l'elenco delle forme finora genericamente o specificamente determinate:

Pseudocidaris sp.
Polycyphus sp. n.
Heterodiodema libycum Des. var.
Diplopodia (*Tetragramma*) sp. ind.
Micropedina olisiponensis (Forb.)
Orthopsis sp. ind.
Pyrina sp. n.
Globator sp.
Echinobrissus sp. ind.
Holaster sp. n.
Hemiaster orbignyanus Des. var.
» sp. n.
» sp. div.
Linthia (?) sp. n.

Oltre alle 4 specie non determinabili e ad altre 2 non peranco determinate, ne abbiamo dunque 5 nuove e 3 già note, sebbene in parte costituenti varietà alquanto diverse dai tipi. La fauna, nel suo complesso, apparisce, come si vede, assai differente da quelle conosciute, ciò che del resto poteva prevedersi, trattandosi di regione molto lontana e isolata.

Sulle deduzioni d'ordine cronologico e paleobiogeografico, che si posson trarre dal mio studio preliminare, avrò forse occasione di tornare in seguito: basti per ora accennare all'importanza paleontologica di questa piccola fauna, e al significato nettamente mesocretaceo di alcuni dei suoi componenti.

(¹) Douvillé H., *Le Cretacé et l'Eocène du Thibet central*, Mem. geol. Surv. of India, n. ser., V, Mem. 3ª, Calcutta 1916, pag. 6.

(²) Middlemiss C. T., *The geology of the Hazara and the Black Mountains*, Mem. geol. Surv. India, 26, 1896, pag. 37.

PERSONALE ACCADEMICO

Pervenne all'Accademia la dolorosa notizia delle perdite del Socio nazionale sen. prof. GIUSEPPE VERONESE, mancato ai vivi il 17 luglio 1917, e del Socio straniero F. R. HELMERT, morto il 15 giugno 1917. Apparteneva il primo all'Accademia per la *Matematica*, come Corrispondente dal 1° agosto 1887, e come Socio nazionale dal 9 agosto 1899; e ne faceva parte il secondo, per la *Geografia*, *matematica* e *fisica*, dal 23 agosto 1897.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 2°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 7-10.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 4.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-5.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

PERSONALE ACCADEMICO

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 3.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 3°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del **1917.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Geologia. — *Faune cretaciche del Caracorum e degli Altipiani tibetani* (Spedizione Italiana nell'Asia Centrale, 1913-1914). Nota del Socio C. F. Parona [1].

I professori G. Dainelli e O. Marinelli, membri della Spedizione Italiana nell'Asia Centrale, mi hanno affidato lo studio dei fossili da loro raccolti nei terreni cretacici del Caracorum e degli Altipiani tibetani. Ringraziando i colleghi dell'onorifico incarico, credo opportuno di esporre brevemente i risultati dell'esame sommario delle collezioni, riferendomi, per quanto riguarda gli itinerarî e le località, alla Relazione geografica e geologica preliminare pubblicata dai colleghi stessi nel 1915 (Rivista Geogr. Ital., XXII, fasc. V-VI, Firenze).

I fossili che mi furono comunicati provengono da tre gruppi di località rispettivamente appartenenti al bacino dell'Indo nella regione di Leh, agli Altipiani tibetani della Lingzi Thang, e alla regione attorno al passo del Caracorum. Per quanto mi risulta, sono da ritenere nuove le notizie che posso dare di questi giacimenti cretacici, non avendosi finora, per le regioni accennate, che indicazioni vaghe nei rapporti delle spedizioni antecedenti. Certo sono i primi fossili di questa età, provenienti dalla regione transimalayana, i quali sieno determinati e pubblicati. Lo studio definitivo richiederà la revisione critica di taluni generi e di parecchie specie; per ora, trattandosi di semplici elenchi, mi attengo alle determinazioni e denominazioni quali si trovano nelle illustrazioni classiche delle faune cretaciche imalayane, col

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1917.

vantaggio di rendere pronto il confronto colle faune stesse ed evidenti le affinità che ne risultano.

Ciò premesso, ecco per ciascun giacimento le notizie paleontologiche, corredate dalle informazioni geologiche e topografiche comunicate dai colleghi.

Regione attorno a Leh (Ladàk).

26 aprile 1914. *Càlatse*, circa 3 Km. ad oriente del villaggio omonimo (Khalsi, 3085 m., della carta francese al milione): in una massa calcarea intercalata a scisti, cui sono associati conglomerati verdi; scisti e conglomerati di solito ritenuti eocenici, ma di cui una parte, per la posizione stratigrafica rispetto ai calcari a Rudiste, appartiene probabilmente al Cretacico. Il banco fossilifero è sulla destra dell'Indo, ove sono altre minori masse calcaree, ma la massa maggiore è sviluppata sulla sinistra del fiume e non fu potuta raggiungere. I fossili sono mal conservati: *Cicatrea* (Roudaireia) *cordialis* Stol., cfr. *Cyprina* (Veniella) *Forbesiana* Stol., *Opisoma* sp. ind., radiolitide (framm. forse di *Biradiolites*). La prima specie, la sola alla quale possiamo affidarci pel riferimento cronologico, è del Senoniano.

3 maggio 1914. *Zanscar*: presso il fiume Zanscar a monte di Cilìng (Tchiling della carta francese al milione). Dai frammenti di questa provenienza pare di poter arguire che vi si trovi la fauna di *Rimu nord* della quale diremo in seguito.

4 maggio 1914. *Cilìng*: a monte del paese, nella valle omonima, affluente di sinistra dello Zanscar. Più a monte nella valle compaiono conglomerati, simili a quelli delle località fossilifere di Càlatse. Il fossile quivi raccolto (Diceratide?) nulla permette di aggiungere a quanto già esposi per la fauna di Càlatse.

Località della Lìngzi-Thang.

22 giugno 1914. Oltre *Chisìl I*. Valle che dal passo di Chisìl scende verso NE, sponda sinistra. Il Cretacico è a contatto di calcari grigi e rossastri. Sopra alcune lastre, ostriche. È notevole il calcare grigio scuro con masserelle oolitiformi a *Sphaerocodium*, ben conservati e evidenti nella caratteristica struttura dei grovigli di filamenti cellulari di queste alghe codiacee. Il rinvenimento, mentre conferma che questo tipo di alga non manca al Cretacico, riconferma pure i rapporti genetici che in molti casi l'apparenza e la struttura oolitica hanno con queste alghe. Vedasi al riguardo la mia Nota in Atti R. Acc. di Torino, 1910, XLV.

22 giugno 1914. Oltre *Chisìl II*. Località poco oltre la precedente. Bancone a Rudiste, superiore ai calcari della località precedente. I fossili

provengono dalla sommità della serie locale e si riferiscono a: *Trochosmilia* sp., *Reptomulticava* cfr. *irregularis* d'Orb., *Radiolites indicus* (Stol.) (gruppo del *Rad. radiosus* d'Orb.), *Radiol.* cfr. *Peroni* (Choff.), *Durania* f. ind. (cfr. *D. Arnaudi* (Choff.)). *Gyropleura cenomanensis* (d'Orb.). Presumibilmente questo orizzonte fossilifero spetta al Turoniano inferiore: il calcare può definirsi a miliolidi (con *Lacazina*, *Cuneolina*, ecc.) e contiene anche delle alghe dasicladacee (*Neomeris*).

23 giugno 1914. Oltre *Chisìl III.* Valle, che dal « Campo oltre Chisìl » scende verso NE; sponda destra.

23 giugno 1914. *Dosso della Balena I.* Rilievo allungato, a forma di dosso di balena, che si trova lungo il cammino seguito dagli esploratori tra il passo di Chisìl e Taldàt: più vicino a questa seconda località che non alla prima. Fa parte di una zona calcarea (con passaggi a calcare cereo scuro con ooliti rosse, ocracee) molto sviluppata, in contatto con gli scisti paleozoici.

23 giugno 1914. *Dosso della Balena II.* Poco più oltre della località precedente.

In queste tre ultime località si ripresenta lo stesso terreno; un calcare rossiccio a crinoidi e detriti di altri echinodermi, con *Exogyra ostracina* Lmk. (in Stoliczka), *Pecten* sp., *Hemiaster* sp., *Celleporaria* (Stol.). Ritengo corrisponda alla zona di *Rimu nord*, della quale dirò poi.

24 giugno 1914. *Passo di Taldàt.* Località poco lontana dalla precedente. Calcari con *Exogyra.*

26 giugno 1914. *Mapo-thàng.* Località a SW di Mapo-thàng (Taldàt della carta al milione). Calcare roseo a *Exog. ostracina.*

Anche queste due ultime località presumibilmente spettano alla zona di *Rimu nord.*

28 giugno 1914. *Monte della Piega I.* Nella valle che dal passo di Chisìl scende verso occidente, fianco destro. Il calcare marnoso scuro, rossastro, contiene: *Clionia perforata* Seg., *Exogyra columba* (Lmk.) (*Ex. suborbiculata* Lmk. in Stoliczka). *Ex. Delettrei* Coq.?, *Ex. africana* Lmk., *Plicatula Auressensis* Coq.?, *Pecten Verdachellensis* Forb.?. *Pecten* sp. (cfr. *P. Puzosianus* Math.), *Modiola typica* Forb., *Arca* (Trigonoarca?) *Thevestensis* Coq., *Arca* (Trigonoarca) sp. (cfr. *Tr. Moutoniana* d'Orb.), *Anisocardia aquilina* (Coq.), *Pholadomya carantoniana* d'Orb., *Pholad.* sp. (cfr. *Ph. Archiaciana* d'Orb.), *Liopistha* (Psilomya) sp. (cfr. *L. Molli* Coq.), *Liopistha* (Psilomya) *Ligeriensis* d'Orb., *Schloenbachia gracillima* Kossmat, *Schloenb. inflata* (Sow.) (*Mortoniceras inflatum* Sow. in Pervinquière), *Acanthoceras Jimboi* Perv., *Acanth.* cfr. *Haugi* Perv., *Vascoceras polymorphum* Perv.?; con grande prevalenza di forme del Cenomaniano superiore.

28 giugno 1914. *Monte della Piega II.* Presso alla località precedente. È infatti la stessa roccia e la stessa fauna: *Exogyra Delettrei*

Coq., *Exog. costata* Say, *Plicatula Auressensis* Coq.?, *Modiola typica* Forb., *Inoceramus multiplicatus* Stol., *Pinna* sp. (cfr. *P. complanata* Stol.), *Arca* sp. (cfr. *Trigonoarca Moutoniana* d'Orb.), *Eriphyla lenticularis* Goldf., *Liopistha* (Psilomya) *Ligeriensis* d'Orb., *Liop.* sp., *Cuspidaria* sp. (cfr. *detecta* Stol.).

29 giugno 1914. *Chisìl Gilga.* Località poco a monte di Chisìl Gilga delle carte, presso al Càra-cash. Noto un frammento di ammonite, ma in complesso il materiale non differisce da quello della località seguente.

Località presso il passo del Caracorùm.

29 luglio 1914. *Rimu nord.* Presso la fronte settentrionale (che origina l'Jarcànd) del ghiacciaio Rimu: sulla destra dell'emissario. I fossili di questa provenienza sono del più alto Senoniano: *Doryderma* sp., *Caryophyllia Arcotensis* Stol., *Holocoenia indica* Stol., *Thamnastrea* cfr. *brevipes* Stol., *Argiope* sp., *Rhynchonella mutua* Stol., *Rh. Arrialoorensis* Stol., *Tererebratula subdepressa* Stol., *Waldheimia*? sp., *Alectryonia pectinata* Lmk. (= *A. frons* Parck.), *Alectr. Arcotensis* Stol. (= *Al. Aucapitanei* Coq. sec. Pervinquière), *Cardium* (Trachycardium) *exulans* Stol., *Pholadomya* cfr. *indica* Noetl.

17 agosto 1914. *Cip-Ciàk.* Località presso il guado del Cip-ciàk, lungo la via dalle Dapsāng al passo del Caracorùm (cioè presso a Daoulet Beg della carta francese al milione). Sulla destra del fiume. La serie calcarea è superiore alla serie gessoso-arenacea. I frammenti di calcari a piccoli detriti di fossili avuti in esame sembrano della stessa zona di *Rimu nord.*

19 agosto 1914. *Valletta delle Ammoniti.* Vàlle affluente di destra del corso d'acqua che scende dal passo di Caracorùm verso il Cip-ciàk: non molto a monte della confluenza. Anche i frammenti di fossili avuti da questa località sembrano appartenere alla stessa fauna di *Rimu nord*; ma è da notare un esemplare di *Eupsammia varians* Stol. che è fossile cenomaniano.

Le specie riconosciute e qui elencate appartengono dunque a faune del Cretacico medio e superiore. Non si può escludere però che nelle regioni esplorate anche il Cretacico inferiore sia rappresentato: infatti altrove nel Nord dell'India (Imalaya) questo piano esiste concordante col Giurassico, e, in generale, vi è rappresentato da una serie, nella quale ha particolare sviluppo e continuità l'Aptiano, colle caratteristiche che gli sono costanti a partire dai Pirenei.

È noto che nella catena principale dell'Imalaya e nelle catene tibetane è incompleta, o, più esattamente, non si conosce completa la serie del Cretacico medio, ed è pure noto lo sviluppo che vi assume il Cenomaniano.

Già i recenti studî sul Cenomaniano nella regione mediterranea, segnatamente nel Nord-Africa, hanno messo in evidenza le affinità che le loro faune cenomaniane hanno con quelle sincrone imalayane: ora il confronto diretto che ho potuto fare fra la fauna cenomaniana tripolitana-tunisina e questa transimalayana mi convince che le corrispondenze faunistiche fra i giacimenti cenomaniani mediterranei e quelli imalayani, in occidente e in oriente del grande Mediterraneo cretacico, si fanno sempre più manifeste, col progredire degli studî e delle conoscenze.

Nel riguardo paleontologico è da notare ancora un'altra circostanza comune alle due lontane regioni: ed è la incertezza nei limiti fra Cenomaniano e Turoniano, dovuta ad orizzonti con rudiste, nei quali si hanno forme che passano dal Cenomaniano superiore al Turoniano inferiore, come appunto si osserva nella piccola fauna a rudiste di Chisìl. Mancano indizî sicuri di una fauna più schiettamente turoniana: così sembra mancare la rappresentanza del Senoniano inferiore, mentre è chiaramente rappresentato il superiore o Maestrichtiano. E il breve elenco di fossili del Sopracretacico non contraddice al concetto già acquisito circa le affinità, che, similmente a quelle su accennate per il Cenomaniano, collegano il Senoniano mediterraneo, e specialmente quello nord-africano, col Senoniano orientale.

Matematica. — *Sulla derivazione ad indice qualunque.* Nota della dottoressa Angela Maria Molinari, presentata dal Corrisp. A. Di Legge [1].

Nelle mie Note precedenti [2] dopo aver definito, in modo che mi sembra utile e coerente con le regole del calcolo, l'operazione D^n, quando D rappresenti l'ordinaria derivazione $\frac{d}{dx}$, e l'indice n sia un numero qualunque, ed aver accennato alle soluzioni proposte dai diversi autori che hanno considerato il problema, ho esposto il concetto che la definizione di D^n, per quanto arbitraria, per rendersi utile, deve esser tale da soddisfare ad un insieme di condizioni più restrittive di quelle verificate dalle varie formule proposte, in particolare alla condizione $D^m D^n = D^{m+n} = D^n D^m$, e data una formula che vi soddisfa realmente.

Mi propongo di mostrare, in questa Nota, qualche applicazione.

[1] Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1917.

[2] Cfr. Molinari, *Derivazione ad indice qualunque*, Rend. Lincei (1916), vol. XXV, pp. (230-233) e pp. 268-273.

1°. Alle equazioni integrali tipo Abel, anche estese fra limiti infiniti. Sia data

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\lambda}}\,d\xi \qquad (0<\lambda<1)$$

dove $f(x)$ si annulli d'ordine sufficiente per $x=-\infty$). Allora

$$f(x)=\Gamma(-\lambda+1)\int_{-\infty}^{x}\frac{(x-\xi)^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda+1)}\,u(\xi)\,d\xi\,,$$

ovvero, in virtù della formula

$$D^{-n}f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\,f(\xi)\,d\xi\,.$$

quest'equazione può scriversi

$$f(x)=\Gamma(-\lambda+1)\,D^{\lambda-1}\,u(x)\,;$$

dunque è soddisfatta dalla soluzione

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}\,D^{1-\lambda}f(x)$$

$$u(x)=\frac{D}{\Gamma(-\lambda+1)}\,D^{-\lambda}f(x)$$

$$u(x)=\frac{D}{\Gamma(-\lambda+1)}\int_{-\infty}^{x}\frac{(x-\xi)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\,f(\xi)\,d\xi$$

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)\,\Gamma(\lambda)}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{\lambda-1}f(\xi)\,d\xi\,.$$

Ma poichè

$$\Gamma(-\lambda+1)\,\Gamma(\lambda)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\,.$$

avremo

$$u(x)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{\lambda-1}f(\xi)\,d\xi\,,$$

e, nel caso che $f(x)$ si annulli addirittura fra $x=-\infty$ ed $x=a$, se ne ricava la formula di Abel.

Siamo dunque riusciti a trovare, in virtù di *un metodo*, la formula di Abel ed anche con una lieve generalizzazione.

2°. All'equazione del calore.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha^2\frac{\partial u}{\partial t}\,. \qquad (1)$$

Se $u(x, t)$ è funzione tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^{1/2} u}{\partial t^{1/2}} \tag{2}$$

dico che $u(x, t)$ soddisfa pure alla (1). Infatti, se u soddisfa alla (2), la quale è lineare, giacchè anche $\frac{\partial^{1/2} u}{\partial t^{1/2}}$ da noi definito è lineare, vi soddisfa anche $\frac{\partial u}{\partial x}$, e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial x};$$

da cui, tenendo conto della (2) e dell'eguaglianza $D^m D^n = D^{m+n}$, si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

È da notare che la reciproca non è vera, perchè u potrebbe soddisfare alla (1) e non alla (2); tale sarebbe, per esempio, il caso in cui u fosse soluzione della

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial^{1/2} u}{\partial t^{1/2}}. \tag{2'}$$

È però facile verificare che combinando linearmente le soluzioni della (2) e della (2)′ si ottengono tutti gli integrali della (1).

Proponiamoci invece il problema: in una sbarra indefinita, nel senso delle x positive, sotto la condizione che u si annulli per $x = +\infty$ e che la (1) valga in tutta la sbarra, sia data arbitrariamente la successione $u_0(x)$ dei valori di u per $x = 0$ e per ogni valore di t a partire da $t = -\infty$; si vuol trovare la successione $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ dei valori di $\frac{\partial u}{\partial x}$ per $x = 0$ e per ogni valore di t. Ovvero, dato all'origine, od in un punto qualsiasi, l'andamento dei valori della temperatura, trovare il gradiente della temperatura medesima, *senza risolvere l'equazione*, senza passare, cioè, per il tramite della formula che dà $u(x, t)$ in tutta la sbarra. Questo problema, d'importanza fisica e meteorologica ben conosciuta, si presenta anche negli studî del raffreddamento terrestre.

Le nostre formule, di derivazione frazionaria, conducono alla risoluzione in modo quasi immediato. Infatti, in virtù di tali formule, $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}$ si comporta come un moltiplicatore numerico e la soluzione della (1) assume così la forma simbolica

$$u = e^{-\alpha x \sqrt{\frac{d}{dt}}} u_0(t),$$

la unica che soddisfi alle altre condizioni proposte. Dalla formula precedente avremo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha \sqrt{\frac{d}{dt}}\, e^{-\alpha x \sqrt{\frac{d}{dt}}}\, u_0(t)$$

che diviene, per $x = 0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = -\alpha \sqrt{\frac{d}{dt}}\, u_0(t) ;$$

occorre dunque assumere u soluzione della (2)′ anzichè della (2), ciò che si sarebbe potuto ammettere senz'altro. Sostituendo a $\sqrt{\frac{d}{dt}}\, u_0(t)$ la sua espressione, data dalle nostre formule, si ha la soluzione richiesta

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \alpha \sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}}\, u_0(\tau)\, d\tau ,$$

soluzione che coincide con quella che si ottiene cercando, con metodi noti, l'integrale $u(x\,,t)$ della (1) sotto le condizioni proposte, poi derivando e ponendo $x = 0$, procedimento, però, di gran lunga più laborioso.

Matematica. — *Soluzione di alcune equazioni del tipo di Abel.* Nota del dott. PIO SCALIZZI S. J., presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE [1].

Intendo proporre l'integrale generale di qualche equazione del tipo cosiddetto di Abel, della forma:

$$[1] \qquad \frac{dy}{dx} = Ay^3 + By^2 + Cy + D$$

con A, B, C, D funzioni della sola x. Abel veramente studiò l'equazione [2]:

$$(z + s)\, dz + (p + qz + rz^2)\, dx = 0$$

con p, q, r, s funzioni della sola x, ma la si può ricondurre al tipo [1], posto:

$$z = \frac{1}{y+1} \qquad A = \beta \qquad B = \alpha + 3\beta \qquad C = r + 2\alpha + 3\beta$$

$$D = r + \alpha + \beta \qquad \alpha = q - 2rs - \frac{ds}{dx} \qquad \beta = p - qs + rs^2 .$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1917.

(2) *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel,* nouvelle édition publiée par M. M. L. Sylow et S. Lie, Christiania.

Per le ipotesi che egli fa su questa equazione e sulla equazione canonica della [1]:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\frac{1}{Z} + 1$$

per ogni speciale $\varphi(x)$ genialmente ricavata dalla stessa formazione del fattore integrante, non riesce a dare arbitrarietà altro che ad uno o a due coefficienti della [1].

Eulero (1) ha risolto alcune equazioni studiando il tipo canonico:

$$[2] \qquad \frac{dy}{dx} = \Phi_1\frac{1}{y} + \Phi_2$$

e dopo lui il Minding (2) che espone dei teoremi interessanti su certi moltiplicatori.

L'Elliot (3) servendosi dell'invarianza delle Φ_1 e Φ_2 per una trasformazione proiettiva, dà una soluzione che dipende da una data condizione e da un integral particolare radice di un'equazione troppo complicata.

Ad A. N. Korkine (4) è dovuta la completa soluzione della [2] quando possa essere soddisfatta dalle radici di un'equazione algebrica.

Lo stesso ha fatto il Koïalovicz (5) ma meno generalmente.

Anche l'Halphen (6) e il Darboux (7) studiano e risolvono equazioni particolari che possono ridursi alla forma [1].

Se si operano nella [1] le trasformazioni:

$$(\alpha) \qquad y = u + e^{\xi + \int [3Au^2 + 2Bu + C]dx} \quad \text{e} \quad \theta = e^{-\xi}$$

essendo u un integral particolare, si perviene facilmente al tipo canonico di Eulero:

$$[2]' \qquad \frac{d\theta}{dx} + \Phi_1\frac{1}{\theta} + \Phi_2 = 0$$

con

$$\Phi_1 = Ae^{2\int [3Au^2+2Bu+C]dx} \quad \text{e} \quad \Phi_2 = \{3Au + B\}\, e^{\int [3Au^2+2Bu+C]dx}.$$

(1) Eulero, *Novi Commentari*, Acad. Petrop., 17 (1772), éd. 1773, pag. 105.

(2) Dott. Ferd. Minding, *Beitrage zür Integration der differentialgleichungen erster ordnung*, Mémoires de l'Académie des sciences de St Péterbourg, VII série, tome V, n. 1, 1882.

(3) V. Z. Elliot, Annales de l'École Normale.

(4) Matematiche Annalen, 1897.

(5) M. Koïalovicz, *Recherches sur l'équation différentielle* $y\,dy - y\,dx = R(x)\,dx$, an. 1894.

(6) G. H. Halphen, C. R. Acc. sc. Paris, 88 (1879), pp. 417, 562.

(7) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, 4, Paris, 1896.

Se si pone per ipotesi $\Phi_2 = 0$ dovrà essere

$$3Au + B = 0 \quad e \quad u = -\frac{B}{3A}$$

che sostituito nella prima equazione, darà:

$$\Phi_1 = Ae^{2\int \left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\} dx}.$$

Dalla [2]' avremo immediatamente:

$$\theta = \sqrt{K - 2\int \Phi_1 \, dx}$$

essendo K costante arbitraria.

D'altra parte per le trasformazioni (α) sarà:

$$\theta = \frac{e^{\int \left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\} dx}}{y + \frac{B}{3A}}$$

sicchè dovrà essere:

$$\frac{e^{\int \left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\} dx}}{y + \frac{B}{3A}} = \sqrt{K - 2\int Ae^{2\int \left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\} dx} dx}$$

ossia:

$$y = \frac{e^{\int \left[C - \frac{B^2}{3A}\right] dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int \left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\} dx} dx}} - \frac{B}{3A}.$$

Sicchè A , B , C restano funzioni indipendenti nella equazione integrata:

$$\text{(I)} \qquad y' = Ay^3 + By^2 + Cy + D_0$$

in cui però

$$D_0 = y_0' - Ay_0^3 - By_0^2 - Cy_0 \quad \text{con} \quad y_0 = -\frac{B}{3A}$$

quindi sarà

$$D_0 = \frac{d}{dx}\left[-\frac{B}{3A}\right] - \frac{B}{3A}\left[\frac{2}{9}\frac{B^2}{A} - C\right].$$

Se si pone nella (I) B = 3 si avrà:

$$(II) \qquad y' = Ay^3 + 3y^2 + Cy - \frac{A'}{A^2} - \frac{1}{A}\left[\frac{2}{A} - C\right].$$

Il cui I. G. è:

$$y = \frac{e^{\int\left(C - \frac{3}{A}\right)dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int\left\{C - \frac{3}{A}\right\}dx}dx}} - \frac{1}{A}.$$

Se si volesse arbitrario il termine noto, basterebbe trovare A che soddisfi all'equazione di Riccati:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{A}\right) - \frac{2}{A^2} - \frac{C}{A} = D$$

essendo D arbitrario. Sarà $\frac{1}{A} = f(u_1\, CD)$, significata con f la formola di risoluzione Riccatiana, con u_1 un integral particolare. L'equazione risolta sarebbe:

$$(III) \qquad y' = f(u_1\, CD)^{-1}\, y^3 + 3y^2 + Cy + D$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int[C - 3f(DC\, u_1)]\,dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int[C - 3f(DC\, u_1)]\,dx}dx}} - f(DC\, u_1).$$

Se si pone nella (I) B = 3A avremo l'equazione:

$$(IV) \qquad y' = A\{y^3 + 3y^2 - 2\} + C\{y + 1\}$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int\{C - 3A\}\,dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int\{C - 3A\}\,dx}dx}} - 1.$$

Posto ancora nella (II) A = 2 si ottiene ancora:

$$(V) \qquad y' = 2y^3 + 3y^2 + Cy - \frac{1}{2}(1 - C)$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int \left\{ C - \frac{3}{2} \right\} dx}}{\sqrt{K - 4 \int e^{2 \int \left[C - \frac{3}{2} \right] dx} dx}} - \frac{1}{2},$$

da ultimo posto $A = 1$, $C = f(x)$ nella (IV), avremo:

$$\text{(VI)} \qquad y' = y^3 + 3y^2 + f(x)(y + 1) - 2$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int [f(x) - 3] dx}}{\sqrt{K - 2 \int e^{2 \int [f(x) - 3] dx} dx}} - 1 .$$

Per riprova verifichiamo l' I. G. dell' ultima equazione posta, per semplificare, $f(x) = 3$. La (VI) diviene:

$$y' = y^3 + 3(y^2 + y) + 1 \quad \text{sarà} \quad y = \frac{1}{\sqrt{K - 2x}} - 1 .$$

Fatto $\sqrt{K - 2x} = \varphi$, sostituendo questo valore della y e moltiplicando tutto per φ^3, avremo l' identità:

$$1 = 1 - 3\varphi + 3\varphi^2 - \varphi^3 + 3\varphi - 6\varphi^2 + 3\varphi^3 + 3\varphi^2 - 3\varphi^3 + \varphi^3 .$$

Chimica tecnologica. — *Saggi sui combustibili fossili italiani* [1]. Nota I di Giovanni Sani, presentata dal Socio Körner [2].

Con la presente Nota io intendo di riservarmi lo studio che ho in corso ed i cui risultati pubblicherò prossimamente, sullo stato chimico di alcuni fra i principali elementi che costituiscono i combustibili fossili italiani; sul rapporto qualitativo e quantitativo fra i materiali disciolti con opportuni solventi da questi, come tali o previamente sottoposti a processi idrolittici, ed i prodotti ottenuti per la loro distillazione operata in differenti condizioni; nonchè sui residui delle diverse manipolazioni sopraindicate.

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica agraria del R. Istituto agrario superiore di Perugia.

[2] Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1917.

Frattanto ho l'onore di presentare a codesta illustre Accademia alcune ricerche preliminari che non mi sembrano destituite di interesse scientifico e pratico.

Le nostre cognizioni sulla costruzione degli edificî molecolari complessi da cui risultano costituiti i vegetali, ci permettono, in alcuni casi ed entro certi limiti, di potere seguire, per momenti fisiologici, l'accrescimento delle piante che è accompagnato dall'apparire di determinati aggruppamenti atomici, cui sono legate certamente proprietà — forse funzioni speciali. — Così la lignificazione è caratterizzata dalla comparsa di ossimetili (come ho dimostrato avvenire per la germinazione del Faggio), mentre assieme ai furfurogeni si vedono formarsi acetili in proporzioni pressochè costanti, e così dicasi di gruppi CO nelle molecole ed altri di particolare importanza ancora nei riflessi tecnici.

Ora con la scorta di dati di fatto si è dimostrato che la carbonizzazione naturale è dovuta ad attività di microorganismi anerobici, che deve essersi risolta e si risolve in processi fermentativi che hanno per effetto una graduale, progressiva desossigenazione — con produzione finale di CO^2 a fianco talora di metano e di H. —

In generale chi si occupa di fossilizzazione prende in considerazione solo il cellulosio, non occupandosi punto di tutte le altre sostanze organiche che componevano i vegetali da cui i combustibili fossili derivano, ma non può farsi astrazione del vario contenuto cellulare che è rappresentato principalmente da altri idrati di carbonio, da grassi, da diverse sostanze organiche azotate, sulla cui labilità è facile giudicare per analogia di ciò che si verifica in organismi viventi o fuori di questi all'aria, per azioni enzimatiche, chimiche, fisiche — ma non è altrettanto agevole stabilire intorno al loro comportamento ed alla loro sorte in condizioni di processi fermentativi anerobici.

Ad ogni modo il loro comportamento, la parte presa all'importante processo deve essere stata salientissima. Se la carbonizzazione naturale ha dei punti di contatto con la distillazione secca del legno, se ne differenzia però grandemente in ciò che a reazioni meno violenti corrisponde la preservazione quasi integrale delle molecole di molte sostanze organiche contenute nelle cellule dei tessuti.

Così può dimostrarsi, ad esempio, in modo semplice ed evidente che per azione di energici riducenti, solo a carbonizzazione completa, si può avere sotto forma di H^2S tutto lo solfo che era passato a solfato — mentre non si ha traccia di acido solfidrico da tutte le ligniti xiloidi e da molte compatte — ciò indica che le sostanze proteiche resistono lungamente (prove dirette, in uguali condizioni, danno H^2S. da gesso, nulla da diversi albuminoidi). Più profonda metamorfosi si ha nei componenti più ricchi di ossigeno, che naturalmente, sono più facile preda dei microorganismi anerobici della fossi-

lizzazione, mentre più lenta va la demolizione delle sostanze più ricche in carbonio. Vediamo infatti alcune resistere molto lungamente e fra queste le azotate più complesse.

In ogni caso i processi sono lenti, secolari — le soste, le tappe naturalmente assai lunghe. Mi parve che l'afferrare qualcuna di queste coi nostri mezzi, seguendo a ritroso la via dell'accrescimento delle piante, nella loro parziale demolizione organica, potrebbe essere istruttivo e ne ebbi conferma sperimentale.

I materiali di studio mi vennero in gran parte favoriti dai proprietarî o dai direttori delle Miniere o dei giacimenti di combustibili fossili in seguito a mia richiesta, con circolare 17 gennaio 1916, ed a tutti rendo le più vive grazie; in parte vennero raccolti da me; certo sarebbe stata buona cosa che io avessi potuto prelevare personalmente tutti i campioni per potere, sopraluogo, per ogni caso, avere precisa cognizione della proporzione in cui possono aversi nello stesso bacino, prodotti essenzialmente diversi e quindi differentemente utilizzabili, ma me ne mancarono i mezzi.

Di mano in mano che i campioni dei combustibili pervennero in Laboratorio, ne preparai di ciascuno due porzioni, una di circa un chilogrammo in pezzetti per determinarvi l'acqua di imbibizione e l'acqua igroscopica e uno in polvere fina, essicato a 110° in corrente di anidride carbonica, per le rispettive analisi complete cui riferirò nella seconda Nota.

Ricerche preliminari.

In primo luogo mi limito per ora a fissare una delle tappe cui ho accennato più sopra:

Esistono ossimetili nei combustibili fossili? Ottenuta risposta affermativa da alcuni saggi qualitativi, volli stabilire se esistono sempre e in quale misura.

Queste determinazioni vennero eseguite col metodo di Zeisel, cui ho dovuto portare una modificazione, per le ligniti più carbonizzate, le cosiddette ligniti compatte brune o picee, nelle quali una parte dello solfo è mineralizzato e per l'azione dell'acido iodidrico, passa a fianco del ioduro di metile, sotto forma di acido solfidrico che dà, insieme al ioduro di argento, solfuro di argento.

Questo inconveniente è ovviato interpolando fra l'apparecchio a bolle con un fosforo rosso e le bevutine con la soluzione alcoolica di nitrato di argento, un tubo ad *u* con soluzione satura di solfato di rame acidificata, che è senza azione sul ioduro di metile; dal solfuro di rame, previo conveniente lavaggio, essicamento e riscaldamento con solfo in corrente di idrogeno, si ha, occorrendo, quantitativamente lo solfo.

Ecco i risultati ottenuti:

		Ossimetili per cento di sostanza secca a 110°	
	Torba leggera (Iseo) ing. Andrea Zuccoli	3.12 —	
	Torba compatta bruna (Iseo) ing. Andrea Zuccoli . .	2.92 —	
	[1] Torba (Campobasso-Pescolanciano) Franzini Gaetano .	2.68 —	
	Lignite xiloide (Collepepe) Sani	6.15 —	
	Lignite xiloide (Colazzone) prof. Papi	5.84 —	
	Lignite xiloide (Spoleto Morgnano) ing. Luigi Fasi. .	5.70 —	
	Lignite xiloide chiara (S. Giovanni Valdarno) . . .	7.06 —	
	Lignite xiloide (Campalli Castelline Chianti) Arturo Lusini	5.86 %	
	Lignite bruna (Poggio Mirteto Roccantica) Giuseppe Montiroli	2.58 »	
	Lignite picea (Collepepe Perugia) Sani.	1.94 »	
	Lignite picea (Pietrafitta Perugia) Cesaroni	1.938 »	
	Lignite picea (Campalli Castelline Chianti) Arturo Lusini	1.50 »	
	Lignite picea (Gandino) Societé générale des lignites en Italie	1.86 »	
	Lignite *compatta Picea* (Spoleto Morgnano)	0.96 »	
	Lignite (Ribolla) picea *carbone* granellini Societé générale des Lignites en Italie	0.26 »	
	Lignite-picea (Colazzone Perugia).	0.104 »	
	Lignite-carbone (Ribolla) Société générale del lignites en Italie	0.00 »	
iniere di Sardegna	Bacu Abis	0.00	danno solo acido solfidrico
	» Derna	0.00	
	» Rodi.	0.00	
	» Ferruccio	0.00	
	Legno di quercia (*quercus robur*)	3.98 »	
	Legno di Pitk-pine (*Pinus rigida*)	4.26 »	

Per termini di paragone ho preso due legni, uno compatto, quello di quercia (*Quercus robur*) e uno resinoso il Pitch-pine (*Pinus rigida*, Mill.) e dai risultati ottenuti si vede in alcune determinazioni che il tenore in metossili è molto vicino a del buon legno di quercia, tanto nelle torbe che in molte ligniti, mentre per molte ligniti xiloidi o legnose è superato ed in misura notevole, anche il contenuto più grande in metossili del legno di resinose. Nasce spontanea la domanda, che scompaiano prima gli idrati di

[1] Questo giacimento di torba di parecchi Kmq. di superficie, con profondità di molti metri, è ancora vergine e merita di essere preso in seria considerazione.

carbonio del contenuto cellulare, presentando maggiore resistenza i composti a gruppi metossilici?

Da altra parte l'esame dei dati soprariferiti ci dimostra ancora che nelle ligniti brune compatte la quantità di metossili va declinando con la progredita carbonizzazione; vediamo infatti che da 2.58 % nella lignite bruno castagno di Poggio Mirteto, scende a 1.94 % nella picea di Collepepe (Sani). Si mantiene a 1.938 nella lignite Cesaromi di Pietrafitta — banco che dista pochi chilometri da quello — poi è 0.96 % nella compatta di Spoleto Morgnano, mentre è solo 0.26 % in quella di Ribolla più carbonizzata tanto da apparire quasi un carbone — per essere poi nulla in tutte le magnifiche ligniti — carboni della Sardegna — dei cantieri Bacu Abis, — Rodi, — Derna, — Ferruccio, — nelle quali l'origine legnosa, macroscopicamente, non è più visibile ed hanno aspetto e splendore di ottimi carboni fossili. Queste trattate con HI forniscono solo H^2S.

Risulta certo che la quantità di metossili è in diretto e stretto rapporto con lo stato di carbonizzazione dei fossili e l'importanza di questo fatto non può sfuggire a nessuno. E nei riflessi pratici ha qualche valore la cosa?

Senza qui entrare in dettagli, mi limiterò ad indicare che ad abbondanza di metossili, nei casi da me presi in considerazione, corrisponde proporzionale resa in alcool metilico, in acido acetico, in catrame ecc. ecc. in buon gas, con un residuo di carbone bene utilizzabile; prodotti che si ottengono nella distillazione secca dei relativi materiali.

Si consideri la deficenza assoluta di legno in Italia e l'enorme quantità di acido acetico, di acetato di calcio, ecc. ecc. importati e si avrà un criterio a giudicare la portata che potrebbe avere questa nuova utilizzazione di parte dei combustibili fossili nostri.

Interessante è lo studio del gas di ligniti xiloidi e di torbe leggere, in confronto di quello di ligniti picee e di torbe compatte.

Con una semplice determinazione di ossimetili il chimico può stabilire prontamente quali prodotti può aspettarsi lavorando opportunamente le ligniti o le torbe che io credo si possano dividere in due classi nette; combustibili fossili a distillato acido, e combustibili fossili a distillato basico.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 3°, Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 7-10.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 4.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-5.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma; Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 4.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 4°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

᛫

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Geodesia. — *Geometria delle superficie e geometria della sfera.* Nota del Socio P. Pizzetti [1].

1. In una interessante Memoria pubblicata recentemente nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo [2] il consocio prof. Severi, allo scopo di dedurre talune espressioni della misura della curvatura di una superficie, ha acutamente instituito il confronto fra le proprietà metriche di una figura descritta sopra una superficie regolare qualunque e quelle di corrispondenti figure sopra una sfera di raggio opportunamente scelto. Una tale pubblicazione mi porge occasione di esporre qui alcune semplici formole, le quali si riattaccano ad argomenti da me trattati in questi Rendiconti nel 1906 e, poco prima, nelle Memorie dell'Accademia di Torino [3]. L'oggetto di quei miei studî era in qualche modo affine a quello del prof. Severi, con questa diversità che mentre a Lui era sufficiente (come ricerca sussidiaria o intermedia) di indagare l'ordine di grandezza infinitesimale della differenza fra gli elementi delle figure superficiali e di quelle sferiche (considerate come infinitesime di 1° ordine le dimensioni lineari delle figure stesse) nel mio caso, dal punto di vista delle applicazioni numeriche alla Geodesia, interes-

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1917.

[2] F. Severi, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, Rend. Circ. Mat. Palermo, tomo XLII, anno 1917.

[3] *Paragone fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati*, Note I e II; *Corollario del teorema relativo al paragone* etc., questi Rendiconti, 1° semestre 1906; *Intorno al grado di approssimazione nella risoluzione dei triangoli geodetici*, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1905.

sava cercare un *limite superiore* delle differenze surricordate. Ho potuto così stabilire alcune formole, che, opportunamente sviluppate, possono condurre ad una, dirò così, geometria di limitazione delle proprietà metriche di una figura descritta su di una superficie qualunque, per mezzo del confronto di questa con due *sfere* le cui curvature siano uguali alla massima e alla minima curvatura della superficie, nella regione che si considera. Di quelle formole fondamentali io mi limitai a dedurre le conseguenze che interessano la Geodesia, ossia i limiti entro cui sono comprese le grandezze degli angoli di un triangolo geodetico di cui siano assegnati i lati. In particolare, come cosa d'interesse teorico, dedussi i limiti fra i quali è compreso il così detto *angolo di parallelismo* sopra una superficie qualsiasi a curvatura negativa (finita).

Riprendo ora quelle formole per determinare i limiti superiori delle differenze fra le figure sferiche e le superficiali in alcuni dei casi trattati dal prof. Severi.

2. Riferiti i punti di una superficie qualunque S ad un sistema di coordinate polari geodetiche, aventi per polo un punto P della superficie, il quadrato dell'elemento lineare è espresso da

$$ds^2 = d\varrho^2 + G\, d\theta^2$$

dove ϱ e θ sono il raggio vettore geodetico e l'anomalia. Posto $g = \sqrt{G}$ (il radicale preso positivamente) e indicata con K la misura della curvatura della superficie nel punto generico, si ha

$$(1)\qquad \begin{cases} K = -\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2}, \\ g_0 = 0 \quad , \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varrho}\right)_0 = 1 \end{cases}$$

ove l'indice 0 si riferisce al polo P ($\varrho = 0$).

Indicando con R una quantità qualunque reale od immaginaria, le tre formole (1) possono compendiarsi nell'unica equazione integrale

$$(2)\qquad g = R \operatorname{sen} \frac{\varrho}{R} + R \int_0^\varrho g_x \left(\frac{1}{R^2} - K_x\right) \operatorname{sen} \frac{\varrho - x}{R}\, dx\,,$$

ove con g_x e K_x si intendono le espressioni di g e K, nelle quali in luogo della lettera ϱ si ponga la x. In particolare, posto $R = \infty$, si ha

$$(2')\qquad g = \varrho - \int_0^\varrho g_x K_x (\varrho - x)\, dx\,.$$

Dalle (2) (2′) si deducono le seguenti principali conseguenze, che mi permetto di ricordare:

1°. Se la curvatura K non supera il valore positivo K_1, la g risulta positiva, a partire dal polo, sopra ogni geodetica uscente da esso, per un arco di lunghezza *almeno uguale* a $\pi/\sqrt{K_1}$. Resta così limitata, intorno a P, una calotta superficiale entro la quale due geodetiche uscenti da P non hanno alcun altro punto in comune. Ad una tale regione intenderemo limitate le cose che seguono.

2°. Se la curvatura K è ovunque positiva, si ha in ogni punto

$$g < \varrho .$$

3°. Se, detta K_0 la curvatura nel punto P, si ha

$$|K - K_0| < h\varrho ,$$

ove h è quantità positiva, si deduce dalla (2) ponendovi $R = 1/\sqrt{K_0}$:

$$\left| g - \frac{1}{\sqrt{K_0}} \operatorname{sen} . \varrho \sqrt{K_0} \right| < \frac{h\varrho^4}{12} . \tag{3}$$

Questa relazione dà il limite superiore dell'errore che si commette quando all'espressione di $\sqrt{G}$, relativa alla superficie considerata, si sostituisca, per approssimazione, la corrispondente espressione per la sfera la cui curvatura eguaglia la curvatura della superficie in P. [Ad esempio: per l'ellissoide di rotazione schiacciato, chiamando a ed e il raggio dell'equatore e la eccentricità, φ la latitudine, α l'azimut della geodetica ϱ, si ha

$$\frac{dK}{d\varrho} = \frac{-2e^2}{a^3(1-e^2)^2}(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{5/2} \operatorname{sen} 2\varphi \cos \alpha .$$

Possiamo quindi assumere

$$h = \frac{2e^2}{a^3(1-e^2)^2} = \frac{1}{75 . a^3}$$

ove si attribuisca ad e il valore proprio dell'ellissoide terrestre].

3. Indichiamo, per brevità, con S_0 la sfera testè considerata, il cui raggio è $1/\sqrt{K_0}$. Scelto sulla S_0 un punto arbitrario come polo di coordinate polari geodetiche, stabiliamo fra i punti della S_0 e quelli della superficie S la corrispondenza biunivoca per uguali valori di ϱ e θ nei punti corrispondenti, e cerchiamo un limite superiore della differenza fra la lunghezza s di un arco finito della S e quella della linea corrisp. della sfera.

Posto $\dfrac{d\theta}{d\varrho} = t$, supponendo per semplicità che lungo l'arco considerato l'anomalia θ varii sempre in un senso fra i valori θ_1 e θ_2, avremo sulla S:

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + g^2 t^2}\, \frac{d\theta}{t} .$$

E sulla sfera, ponendo per brevità $\bar{g}$ in luogo di $\frac{1}{\sqrt{K_0}}\operatorname{sen}\varrho\sqrt{K_0}$:

$$\bar{s}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\bar{g}^2t^2}\,\frac{d\theta}{t}$$

Indicando con g_m un valore intermedio fra g e $\bar{g}$, avremo

$$\sqrt{1+g^2t^2}-\sqrt{1+\bar{g}^2t^2}=\frac{g_m t^2}{\sqrt{1+g_m^2t^2}}(g-\bar{g})=Ct(g-\bar{g})$$

dove

$$|C|=\left|\frac{g_m t}{\sqrt{1+g_m^2t^2}}\right|<1. \tag{4}$$

Quindi

$$s-\bar{s}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}C(g-\bar{g})\,d\theta,$$

e ricordando le (3) e (4)

$$|s-\bar{s}|<\frac{h\varrho_m^4}{12}(\theta_2-\theta_1)$$

ove con ϱ_m si indichi il massimo valore che assume il raggio geodetico ϱ lungo la linea che si considera.

(Nel caso dell'ellissoide terrestre, supposto $\varrho_m \leqq 300$ chilometri e $\theta_2-\theta_1=2\pi$, si ha $s-\bar{s}<\frac{\varrho_m}{1400000}$).

4. Cerchiamo anche un limite superiore delle differenze fra due angoli corrispondenti sulle due superficie, nella stabilita corrispondenza biunivoca. Chiamiamo α l'angolo che una linea sulla S in un suo punto fa col raggio geodetico ϱ. Sarà

$$\operatorname{tang}\alpha=g\frac{d\theta}{d\varrho}.$$

E per l'angolo corrispondente sulla sfera

$$\operatorname{tang}\bar{\alpha}=\bar{g}\frac{d\theta}{d\varrho}.$$

Posto, come sopra, $\frac{d\theta}{d\varrho}=t$, avremo

$$\operatorname{tang}(\alpha-\bar{\alpha})=\frac{(g-\bar{g})t}{1+g\bar{g}t^2}. \tag{5}$$

Il valore massimo assoluto del rapporto $\frac{t}{1+g\bar{g}t^2}$ (per valori reali di t) si ha per $t=1/\sqrt{g\bar{g}}$, con che il valore massimo del 2° membro della (5) risulta

$$\frac{|g-\bar{g}|}{2\sqrt{g\bar{g}}}.$$

Indicando, come sopra, con K_1 il valor massimo della curvatura K di S, si deduce facilmente dalla (2) (ponendovi $R=1/\sqrt{K_1}$)

$$g \geq \frac{1}{\sqrt{K_1}} \operatorname{sen} . \varrho\sqrt{K_1}.$$

Lo stesso limite inferiore varrà per $\bar{g}$. Abbiamo quindi, in definitivo, dalla (5) ricordando la (3)

$$|\operatorname{tg}(\alpha-\bar{\alpha})| < \frac{h\varrho^3}{24}\left(\frac{\varrho\sqrt{K_1}}{\operatorname{sen} . \varrho\sqrt{K_1}}\right)$$

ove il fattore entro parentesi risulta finito nella regione limitata che consideriamo.

(Posto $\varrho=300$ Km., con che il fattore, ora detto, risulta minore di 2, si ha per l'ellissoide terrestre

$$|\operatorname{tg}(\alpha-\bar{\alpha})| < \frac{1}{8500000}$$

dove

$$\alpha-\bar{\alpha} < 0'',024).$$

5. Con metodo analogo a quello tenuto nei precedenti paragrafi, si può instituire il confronto fra la superficie qualunque e la sfera anche quando si faccia uso di altri sistemi di coordinate curvilinee, e quindi di altre specie di corrispondenza biunivoca.

Assumiamo, in particolare, come linee $v=\text{cost}$ le geodetiche che tagliano sotto angoli (corrispondenti) eguali ω una geodetica fissa C e per linee $u=\text{cost}$ i luoghi degli estremi di archi uguali misurati sulle dette geodetiche a partire da C, ossia, per usare la locuzione del Severi, le linee di equidistanza obliqua, secondo l'angolo ω, dalla C.

L'espressione del quadrato dell'elemento lineare è allora, come risulta da elementari considerazioni di Geometria differenziale:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Se v esprime l'arco della curva base C, si ha $G = 1$ e quindi $\frac{\partial G}{\partial v} = 0$ sulla curva C, ossia per $u = 0$. Di più, per essere geodetica la C, sarà pure

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \qquad \text{per } u = 0. \tag{6}$$

Posto

$$\Delta = G - \cos^2 \omega, \tag{7}$$

la misura della curvatura della superficie nel punto generico è espressa da

$$K = -\frac{1}{2\Delta}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{1}{4\Delta^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 = -\frac{1}{2\Delta}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u^2} + \frac{1}{4\Delta^2}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial u}\right)^2,$$

ovvero da

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{\partial^2 \sqrt{\Delta}}{\partial u^2}. \tag{8}$$

Dalle (6) (7) risulta poi

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta = \mathrm{sen}^2 \omega, \quad \frac{\partial \sqrt{\Delta}}{\partial u} = 0 \\ &K = -\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2 \omega}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \end{aligned}\right. \qquad \text{per } u = 0. \tag{9}$$

6. Osserveremo, di passata, che l'espressione della curvatura data dal Severi nella pag. 19 della sua Memoria. può dedursi subito dalle precedenti formole.

Sia infatti il quadrilatero $PQP'Q'$ costituito da un arco di geodetica PQ, da due archi geodetici (uguali) PP', QQ' che facciano, dalla stessa banda, l'angolo ω colla PQ, e dalla linea di equidistanza $P'Q'$. Indichiamo con $(0,0)$, $(0,\delta v)$, $(\delta u, 0)$, $(\delta u, \delta v)$ le coordinate rispettive dei punti P, Q, P', Q' nel sistema di coordinate considerate nel paragrafo precedente, ove la PQ si assuma come curva base. Avremo:

$$PQ^2 = (\delta v)^2$$

$$P'Q'^2 = G(\delta v)^2 = \left\{ 1 + \delta u \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)_0 + \frac{\delta u^2}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)_0 \right\} (\delta v)^2$$

ovvero, per le (6) e (9)

$$P'Q'^2 = \{ 1 - K(\delta u)^2 \,\mathrm{sen}^2 \omega \} (\delta v)^2$$

donde

$$K = \lim \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\Delta^2},$$

essendo Δ l'area del parallelogrammo $PQP'Q'$.

Un'altra espressione limite della K può ottenersi considerando l'angolo Ω che la geodetica v, uscente dal punto generico P della curva base C, fa, nel suo punto generico P′, colla linea di equidistanza obliqua uscente da P′.

Avremo

$$\cos\Omega = \frac{\cos\omega}{\sqrt{G}}. \tag{10}$$

E collo sviluppo in serie di Taylor, posto $PP' = \delta u$

$$\Omega = \omega + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)_0 \delta u + \frac{(\delta u)^2}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}\right)_0.$$

Deducendo dalla (10) le espressioni delle derivate di Ω e ricordando le (6) e (9), si trova senza difficoltà

$$K = \lim \frac{4(\omega - \Omega)}{PP'^2 \cdot \operatorname{sen} 2\omega}.$$

7. Ritorniamo al caso di figure di dimensioni finite. La equazione differenziale (8) e le prime due equazioni (9) possono compendiarsi nell'unica equazione integrale

$$\sqrt{\Delta} = \operatorname{sen}\omega \cos\frac{u}{R} + R\int_0^u \sqrt{\Delta_x}\left(\frac{1}{R^2} - K_x\right)\operatorname{sen}\frac{u-x}{R}\,dx, \tag{11}$$

ove R è quantità affatto arbitraria, In particolare

$$\sqrt{\Delta} = \operatorname{sen}\omega - \int_0^u \sqrt{\Delta_x}\, K_x(u-x)\,dx. \tag{11'}$$

Qui, come nel § 2, con K_x e Δ_x si intendono le espressioni di K e Δ ove alla lettera u si sostituisca la lettera x.

Se K_1 è limite superiore della curvatura K, ponendo nella (11) $R = 1/\sqrt{K_1}$, si trova che $\sqrt{\Delta}$ non può annullarsi per valori di u inferiori a $\pi/2\sqrt{K_1}$. Il che è quanto dire che: *sopra ciascuna delle considerate geodetiche* (u) *uscenti dai punti della* C, *l'arco compreso fra la* C *e l'inviluppo delle geodetiche stesse è per lo meno uguale a* $\pi/2\sqrt{K_1}$.

Dalla (16′) si deduce poi che, se la curvatura della superficie è dappertutto positiva, nella regione ora considerata nella quale $\sqrt{\Delta}$ non si annulla, si ha

$$\sqrt{\Delta} < \operatorname{sen}\omega \ \ [1].$$

[1] Più generalmente se K assume valori negativi colla limitazione $K > -\frac{1}{R^2}$, si ha facilmente dalla (11):

$$\sqrt{\Delta} < \frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega\,(e^{u/R} + e^{-u/R}).$$

Poniamo ora nella (11) $R = 1/\sqrt{K_0}$ dove K_0 è la curvatura della superficie in un punto P della curva C, e supponiamo che, a distanza geodetica u da P, il valore della curvatura K soddisfaccia alla diseguaglianza

$$|K - K_0| < hu,$$

ove h è quantità finita positiva. Allora dalla (11) si deduce senza difficoltà

$$(12) \qquad \left|\sqrt{\Delta} - \operatorname{sen}\omega \cos u\sqrt{K_0}\right| < \frac{hu^3}{6} \operatorname{sen}\omega .$$

È facile dedurre di qui un limite superiore della differenza fra $\sqrt{G}$ e l'espressione corrispondente $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}$ per la sfera la cui curvatura è uguale a K_0.

Infatti dalle due uguaglianze

$$\sqrt{a - b} = \sqrt{a_0 - b} + \varepsilon$$
$$\sqrt{a} = \sqrt{a_0} + \eta,$$

ove $a, a_0 . b, \varepsilon, \eta$ sono quantità reali qualunque, si deduce tosto

$$\eta^2 + 2\eta\sqrt{a_0} = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a_0 - b} ,$$

e quindi

$$|\eta| < \frac{\varepsilon^2 + 2|\varepsilon|\sqrt{a_0 - b}}{2\sqrt{a_0}}.$$

Ricordando che $\Delta = G - \cos^2\omega$, si deduce così dalla (12)

$$(13) \qquad \left|\sqrt{G} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}\right| < \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon \operatorname{sen}\omega \cos u\sqrt{K_0}}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}}$$

ove

$$(14) \qquad \varepsilon = \frac{hu^3}{b} \operatorname{sen}\omega .$$

Se ora si considerano sulla linea di equidistanza u due punti M, N di coordinate (u, v_1) (u, v_2) si avrà sulla superficie S

$$\text{arco } MN = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G}\, dv .$$

E sulla sfera l'arco corrispondente $M N_1$ sarà espresso da

$$\text{arco } M_1 N_1 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}\,(v_2 - v_1).$$

La differenza fra i due archi è quindi

$$< \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon \operatorname{sen}\omega \cos u\sqrt{K_0}}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}}(v_2 - v_1),$$

ove ε è data dalla (14).

Matematica. — *Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili.* Memoria del Socio L. Bianchi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Matematica. — *Le serie di funzioni sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio [1].

1. In una Memoria di prossima pubblicazione [2], della quale ho dato un sunto in una recente Nota [3], ho esposto un metodo di sommazione delle serie che è di grandissima potenza e che tuttavia ammette tutto l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti.

In questa Nota mi propongo di applicarlo alle *serie di funzioni*

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots \tag{1}$$

2. Consideriamo perciò la *serie associata di ordine* r alla (1) (M, n. 5; N, n. 1)

$$u^{(r)}(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r}(x) \frac{\alpha^n}{n!} \tag{2}$$

che si può scrivere per un intero r qualunque (anche negativo), perchè assumiamo, per convenzione, $u_n(x) = 0$ per $n < 0$. Supporremo $\alpha \geq 0$.

Allorchè per tutti i numeri x di un intervallo (a, b) la (2) è una trascendente intera in α e l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x)\, d\alpha \tag{3}$$

è convergente, diremo (M, n. 9; N, n. 1) che la serie (1) *è sommabile col metodo di Borel di ordine* r [4] nell'intervallo; e diremo *somma* della

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1917.

[2] *Nuovo metodo di sommazione delle serie, estensione del metodo di Borel* (comparirà nei Rend. del Circolo mat. di Palermo. Premetteremo una M alle citazioni del testo che si riferiscono a questa Memoria.

[3] *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (questi Atti, vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11°). Premetteremo una N alle citazioni del testo che si riferiscono a questa Nota.

[4] E scriveremo *è sommabile* (B, r).

serie l'espressione

$$(4) \qquad u(x) = U_{r-1}(x) + \int_0^\infty e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x)\, d\alpha,$$

ove

$U_{r-1}(x) = 0$, se $r \leq 0$ e $U_{r-1}(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_{r-1}(x)$, se $r > 0$.

Che se poi la detta convergenza della serie (2) per ogni $\alpha \geq 0$ e dell'integrale (3) è uniforme nell'intervallo (a, b), diremo che la serie (1) è sommabile (B, r) *uniformemente* nell'intervallo.

3. Il concetto di *sommabilità* (B, r) è una estensione del concetto di convergenza [1]. Ora vogliamo dimostrare che la sommabilità (B, r) *uniforme* è una estensione del noto concetto di convergenza uniforme, almeno per la serie di funzioni limitate. Precisamente:

Teorema. — *Ogni serie* (1) *di funzioni limitate in un intervallo* (a, b) *che in esso sia uniformemente convergente con somma* $u(x)$ *è anche sommabile* (B, r) *uniformemente in* (a, b) *e con ugual somma* (*qualunque sia* r).

Per ipotesi, $U_n(x)$, definita dalle (5), tende ad $u(x)$ uniformemente in (a, b); ciò vuol dire che: dato un numero $\varepsilon > 0$, esiste un numero intero *m indipendente da x* (e che supporremo maggiore del valore assoluto di $r - 1$), tale che risulti

$$(6) \qquad |U_{n+r-1}(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per } n \geq m \text{ e } a \leq x \leq b.$$

Ne segue che, essendo

$$(7) \qquad e^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{n!}$$

una trascendente intera, tale sarà pure la serie

$$(8) \qquad \sum_{n=0}^\infty [U_{n+r-1}(x) - u(x)] \frac{\alpha^n}{n!},$$

la quale sarà, inoltre, uniformemente convergente in (a, b) per ogni $\alpha \geq 0$. E delle stesse proprietà godrà la serie

$$(9) \qquad U^{(r-1)}(\alpha, x) = \sum_{n=0}^\infty U_{n+r-1}(x) \frac{\alpha^n}{n!}.$$

[1] Poichè *ogni serie convergente é sommabile* (B, r) *e con ugual somma* (M, n. 10; N. n. 2).

Ne segue che la somma della serie (8) sarà $U^{(r-1)}(\alpha, x) - e^{\alpha} u(x)$ e che quindi si avrà

$$e^{-\alpha} U^{(r-1)}(\alpha, x) - u(x) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [U_{n+r-1} - u(x)] \frac{\alpha^n}{n!};$$

da cui

$$(10) \qquad \left| e^{-\alpha} U^{(r-1)}(x) - u(x) \right| \leq e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \left| U_{n+r-1}(x) - u(x) \right| \frac{\alpha^n}{n!} + $$
$$+ e^{-\alpha} \sum_{n=m}^{\infty} \left| U_{n+r-1}(x) - u(x) \right| \frac{\alpha^n}{n!},$$

ove m è il numero poc'anzi definito.

Poichè, per ipotesi, i termini $u_n(x)$ della serie (1) sono funzioni limitate in (a, b), tale sarà pure la funzione $U_{n+r-1}(x)$ (5); inoltre, per la (6), anche la funzione $u(x) - U_{n+r-1}(x)$ è limitata per $r \geq m$; dunque sarà pure limitata la funzione $u(x)$. Quindi, infine, saranno limitate le funzioni

$$U_{n+r-1}(x) - u(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots, m-1);$$

sicchè esisterà una costante positiva K maggiore dei moduli di queste funzioni in (a, b).

Per ciò e pel fatto che, dalla (6), si ha

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left| U_{n+r-1}(x) - u(x) \right| \frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} e^{\alpha}, \quad (a \leq x \leq b)$$

la (10) dà

$$(11) \qquad \left| e^{-\alpha} U^{(r-1)}(x) - u(x) \right| \leq K e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Intanto, per il teorema di l'Hospital,

$$\lim_{\alpha=\infty} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$

quindi esiste una costante $h > 0$, tale che risulti

$$e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{per} \quad \alpha > h.$$

In conseguenza, la (11) dà

$$\left| e^{-\alpha} U^{(r-1)}(\alpha, x) - u(x) \right| < \varepsilon \quad \text{per} \quad \alpha > h \quad \text{e} \quad a \leq x \leq b.$$

Ciò dimostra che

$$(12) \qquad \lim_{\alpha=\infty} e^{-\alpha} U^{(r-1)}(\alpha, x) = u(x) \quad \text{uniformemente in } (a, b).$$

Ora osserviamo che la serie di funzioni di x (2) è uniformemente convergente in (a, b) per $\alpha \geq 0$, poichè può dedursi dalla (1), che è ivi uni-

formemente convergente per ipotesi, moltiplicandone i termini per i fattori positivi $\frac{\alpha^n}{n!}$ che, a partire da un certo n, sono minori di 1.

Ricordiamo, inoltre, la relazione identica (M, n. 6) facile a verificare

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\alpha}\,\mathrm{U}^{(r-1)}(\alpha\,,x)\right] = e^{-\alpha}\,u^{(r)}(\alpha\,,x)\,.$$

Integrandola tra i limiti 0 ed α ed osservando che, per la (9), è

$$\mathrm{U}^{(r-1)}(0\,,x) = \mathrm{U}_{r-1}(x)\,,$$

si trae che

$$e^{-\alpha}\,\mathrm{U}^{(r-1)}(\alpha\,,x) = \mathrm{U}_{r-1}(x) + \int_0^{\alpha} e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha\,,x)\,d\alpha\,. \tag{13}$$

Per la (12), il secondo membro tende, come il primo, uniformemente ad $u(x)$ per $\alpha = \infty$, perciò l'integrale (3) è nniformemente convergente in $(a\,,b)$ e sussiste la (4). Dunque la (1) è sommabile $(\mathrm{B}\,,r)$ uniformemente in $(a\,,b)$ e con somma $u(x)$.

3. Tutti i teoremi noti sulle serie uniformemente convergenti si lasciano estendere alle serie sommabili $(\mathrm{B}\,,r)$ uniformemente.

I. *Se una serie di funzioni* (1) *è sommabile uniformemente in un intervallo* $(a\,,b)$ *e se in un punto* $x = c$ *dell'intervallo i suoi termini sono funzioni continue, ivi anche la somma* $u(x)$ *della serie è funzione continua.*

Giusta l'ipotesi, la serie (2) è costituita da funzioni continue per $x = c$ ed è uniformemente convergente in $(a\,,b)$ per ogni $\alpha \geq 0$, quindi anche la sua somma $u^{(r)}(\alpha\,,x)$ è funzione continua per $x = c$ e per ogni $\alpha \geq 0$.

Da ciò e dalla uniforme convergenza dell'integrale (3) in $(a\,,b)$ (che pure discende dall'ipotesi) segue che anche detto integrale è funzione continua per $x = c$. E poichè tale è pure $\mathrm{U}_{r-1}(x)$ (5), ne risulta, per la (4), che anche la somma della serie è funzione continua per $x = c$.

II. *Se una serie di funzioni integrabili è sommabile* $(\mathrm{B}\,,r)$ *uniformemente in un intervallo* $(a\,,b)$ *con somma* $u(x)$, *la serie formata dagli integrali dei suoi termini fra i limiti* c_1 *e* c_2 $(a \leq c_1 < c_2 \leq b)$ *è sommabile* $(\mathrm{B}\,,r)$ *ed ha per somma l'analogo integrale di* $u(x)$. *In tal senso si può scrivere:*

$$\int_{c_1}^{c_2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_1}^{c_2} u_n(x)\,dx\,.$$

Per ipotesi, la serie (2) è uniformemente convergente in $(a\,,b)$ per ogni $\alpha \geq 0$, quindi è integrabile termine a termine, dando luogo ad una serie convergente per ogni $\alpha \geq 0$. Posto

$$\int_{c_1}^{c_2} u^{(r)}(\alpha\,,x)\,dx = j(\alpha) \quad , \quad \int_{c_1}^{c_2} u_n(x)\,dx = j_n$$

si ha quindi la serie

$$j^{(r)}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} j_{n+r}\frac{\alpha^n}{n!};$$

che è la serie associata di ordine r alla serie (numerica) $\sum j_n$.

Segue inoltre dall'ipotesi che l'integrale (3) è uniformemente convergente in (a, b), quindi è lecito scrivere

$$(14)\qquad \int_{c_1}^{c_2} dx \int_0^{\infty} e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x)\, d\alpha =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha} d\alpha \int_{c_1}^{c_2} u^{(r)}(\alpha, x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha} j^{(r)}(\alpha)\, d\alpha$$

e l'ultimo integrale è convergente.

Infine, per la (5),

$$(15)\qquad \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{U}_{r-1}(x)\, dx = \mathrm{J}_{r-1}$$

ove

$$\mathrm{J}_{r-1}=0 \quad \text{se} \quad r \leq 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{J}_{r-1}=j_0+j_1+\cdots+j_{r-1} \quad \text{se} \quad r>0.$$

Dalle (14) e (15) segue che esiste l'integrale del secondo membro della (4) e quindi anche quello j del primo e che si ha

$$j=\mathrm{J}_{r-1}+\int_0^{\infty} e^{-\alpha} j^{(r)}(\alpha)\, d\alpha,$$

il che prova che la serie $\sum j_n$ è sommabile (B, r) con somma j.

III. *Se una serie* (1) *di funzioni derivabili è sommabile* (B, r) *in un intervallo* (a, b) *e se ivi è sommabile* (B, r) *uniformemente la serie formata dalle derivate dei suoi termini, la somma di questa serie è la derivata della somma della prima. In tal senso si può scrivere*:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}.$$

Si dimostra, come l'analogo teorema sulle serie di funzioni sommate col metodo ordinario, applicando il teorema II alle serie delle derivate.

Fisica matematica. — *Sulla deduzione puramente matematica delle equazioni del primo principio di termodinamica.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA [1].

Poichè Clausius e, per quanto mi è noto, tutti i trattati di termodinamica deducono le equazioni del primo principio (relative alle variazioni dello stato dei corpi prodotte dal calore) basandosi sull'equivalenza fisica fra calore e lavoro, si può supporre che questa sia indispensabile per ottenere le suddette equazioni e perchè esse siano valide.

Si può dimostrare che invece esse possono essere ottenute con un ragionamento puramente matematico senza supporre altro che una certa dipendenza fra una quantità q e tre variabili p, v, T soddisfacenti, queste ultime, ad un'altra equazione, qualunque sia il significato fisico o matematico che a tutte queste quantità si attribuisce.

È noto difatti che le derivate parziali di una funzione di tre variabili soddisfacenti ad un'altra relazione, si possono esprimere tutte in funzione di due qualunque di esse purchè indipendenti (ossia che entrambe non suppongano costante la stessa variabile) e che le stesse relazioni valgono anche se le derivate parziali si riferiscano non ad una funzione ma ad una quantità che dipenda dalle tre variabili, purchè il suo differenziale totale sia uguale alla somma dei differenziali parziali, ossia quando la relazione sussiste solo fra i differenziali totali.

Ne risulta che se si pone

$$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v = c_v \qquad \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p = c_p$$

qualunque sia il significato che si attribuisce a q, c_p e c_v si avrà anche

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v \frac{\partial T}{\partial p} \quad \text{ossia} \quad \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v = c_v \frac{\partial T}{\partial p}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial v} \quad \text{"} \quad \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = c_p \frac{\partial T}{\partial v}$$

relazioni già usate dal Poisson, e si avrà anche:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p + \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \frac{\partial p}{\partial v}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \frac{\partial v}{\partial p}$$

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1917.

ossia sostituendo i valori già ottenuti delle derivate parziali:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_T = c_p \frac{\partial T}{\partial v} + c_v \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} = (c_p - c_v)\frac{\partial T}{\partial v}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_T = c_v \frac{\partial T}{\partial p} + c_p \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} = -(c_p - c_v)\frac{\partial T}{\partial p}.$$

Ottenute così tutte le derivate parziali essenziali di q, si potranno scrivere le tre diverse espressioni del suo differenziale totale e si avrà:

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_T dv = c_v dT + (c_p - c_v)\frac{\partial T}{\partial v} dv$$

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_T dp = c_p dT - (c_p - c_v)\frac{\partial T}{\partial p} dp$$

$$dq = \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p dv = c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp + c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv$$

equazioni identiche a quelle del primo principio.

Esse possono ottenersi in un modo più semplice, che non richiede l'uso delle relazioni fra le derivate parziali. Poichè variando q variano p, v e T e poichè queste ultime variazioni devono soddisfare ad un'altra relazione, questa permette di eliminarne una qualsiasi e le variazioni di q dipenderanno dalle variazioni di due sole delle tre variabili e si potrà porre:

$$\begin{aligned} dq &= a\,dT + l\,dv \\ dq &= b\,dT + h\,dp \qquad (1) \\ dq &= r\,dp + s\,dv \end{aligned}$$

dove a, l, ecc. sono coefficienti da determinare.

Dalla prima di queste equazioni si ricava per v costante: $(\partial q/\partial T)_v = a$, ma per conservare l'analogia colle equazioni termodinamiche si potrà indicare a con c_v qualunque sia il significato di q.

Similmente dalla seconda equazione, per p costante, si ricava:

$$(\partial q/\partial T)_p = b = c_p$$

e queste due equazioni potranno scriversi:

$$dq = c_v\,dT + l\,dv \qquad\qquad dq = c_p\,dT + h\,dp\,.$$

Uguagliando i secondi membri se ne ricava:

$$dT = \frac{l}{c_p - c_v} dv - \frac{h}{c_p - c_v} dp$$

e siccome dalla relazione fra p, v, T si ha:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial v} dv + \frac{\partial T}{\partial p} dp$$

poichè i coefficienti degli stessi differenziali devono essere uguali, si avrà:

$$l = (c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial v} \qquad h = -(c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial p}$$

e si avranno così determinati in funzione di c_p e c_v anche i coefficienti l ed h. Sostituendo questi valori nelle prime due equazioni (1) ed in una o nell'altra sostituendo il suddetto 2° valore di dT (oppure moltiplicando la prima equazione per $(\partial T/\partial p)\, dp$, la seconda per $(\partial T/\partial v)\, dv$, sommando e riducendo) risulteranno determinati anche i coefficienti r ed s e si avrà:

$$(2) \qquad \begin{aligned} dq &= c_v\, dT + (c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial v} dv \\ dq &= c_p\, dT - (c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial p} dp \\ dq &= c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv + c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp \end{aligned}$$

equazioni del primo principio.

Se la relazione fra p, v, T è $pv = RT$ e si ha quindi $(\partial T/\partial v) = p/R$, $(\partial T/\partial p) = v/R$ esse divengono

$$(3) \qquad \begin{aligned} dq &= c_v\, dT + \frac{c_p - c_v}{R} pdv \\ dq &= c_p\, dT - \frac{c_p - c_v}{R} vdp \\ dq &= (c_p\, pdv + c_v\, vdp)/R \end{aligned}$$

equazioni del 1° principio per i gaz perfetti, ottenute senza supporre nè la equivalenza fisica fra calore e lavoro nè l'effetto termico prodotto dalle variazioni di volume, e per un significato qualsiasi delle suddette variabili. Supponendo che questo sia quello solito ma che dall'esperienza risultasse $c_v > c_p$, l'equivalenza fisica suddetta non sarebbe ammissibile ma tuttavia le equazioni (3) rimarrebbero valide.

Il caso singolare che queste equazioni possono essere dedotte dell'equivalenza fra calore e lavoro ed altresì senza tenerne conto, mi pare dovuto a ciò che le equazioni (1) e tutte quelle che ne vengono dedotte, nelle quali quantità di calore sono equiparate a variazioni di volume e di pressione,

suppongono una certa equivalenza algebrica fra queste quantità. Queste equazioni, difatti, algebricamente e facendo astrazione dai simboli differenziali, non sono diverse essenzialmente da un'equazione

$$N = aL + bP$$

dove N, L e P rappresentino numeri di sterline, di lire italiane e di chilogrammi di una certa merce, mentre a e b rappresentino i valori ossia gli equivalenti in sterline di 1 lira italiana e di 1 chilogrammo di merce, ossia i fattori necessarî affinchè ciascun termine divenga omogeneo con N, mentre $1/a$, $1/b$ rappresenteranno gli equivalenti di 1 sterlina in lire italiane e in chilogrammi di merce. È vero che le relazioni fra queste quantità sono di tutt'altro genere di quelle fra le quantità di calore e le corrispondenti variazioni di pressione e di volume, ma ciò algebricamente non risulta.

Quindi, similmente ed indipendentemente dalla equivalenza fisica fra calore e lavoro, potremo considerare, nella prima delle equazioni (3), $(c_p - c_v)\,p/R$ come l'equivalente in calorìe della variazione isotermica unitaria (sebbene infinitesima) di volume ed $R/(c_p - c_v)\,p$ come l'equivalente della calorìa in variazione isotermica di pressione; nelle altre due equazioni (3) potremo considerare $(c_p - c_v)\,v/R$ come l'equivalente in calorìe della variazione isotermica unitaria di pressione e $c_p\,p/R$, $c_v\,v/R$ come gli equivalenti in calorìe delle variazioni di volume a pressione costante e di pressione a volume costante. Se la variazione di volume produca o assorba realmente calore in conformità della suddetta equivalenza fisica, oppure se vi sia solo corrispondenza (reciproca) fra le due variazioni, dalle equazioni (3) non risulta.

Però si avrebbe così un diverso equivalente in calorìe per ogni termine di ogni secondo membro di queste equazioni, ma se si considera che i termini con dT sono già omogenei con dq per effetto delle definizioni di c_p e c_v e che gli altri contengono sempre il prodotto di una pressione per un volume, avente la stessa unità del lavoro, un solo equivalente, cioè quello del lavoro o il suo reciproco basterà per le tre equazioni. Così ponendo $R/(c_p - c_v) = E$ le equazioni suddette potranno scriversi:

$$\begin{aligned} dq &= c_v\,dT + \frac{pdv}{E} \\ dq &= c_p\,dT - \frac{pdv}{E} \qquad (4) \\ dq &= \left(\frac{c_v}{c_p - c_v}\,vdp + \frac{c_p}{c_p - c_v}\,pdv\right)\frac{1}{E} \end{aligned}$$

e scegliendo convenientemente l'unità di misura per c_p e c_v potremo otte-

nere che sia $R = c_p - c_v$, quindi $E = 1$ e le equazioni diverranno:

$$(5)\qquad \begin{aligned} dq &= c_v\, dT + pdv \\ dq &= c_p\, dT - vdp \\ dq &= (c_v\, vdp + c_p\, pdv)/R \end{aligned}$$

forma solita delle equazioni del principio dell'equivalenza per i gaz, ottenute indipendentemente da esso e che rimarrebbero valide anche se cambiasse il significato delle variabili p, v, T, q.

Con ciò non s'intende diminuire menomamente l'importanza dell'equivalenza fisica fra calore e lavoro, poichè per effetto di questa le suddette equazioni acquistano la grande utilità pratica.

Difatti se supponiamo p. es. che $pv = RT$ sia l'equazione di una superficie, dimodochè le variabili p, v, T non abbiano altro significato che quello delle coordinate z, x ed y rispettivamente, e che q rappresenti lo spessore di uno strato sottile aderente a questa superficie ed evidentemente funzione in ogni suo punto delle coordinate di questo, le (4) saranno valide qualunque sia la legge colla quale varia questo spessore, perchè esse esprimono che il differenziale totale di q è uguale alla somma dei differenziali parziali, come è geometricamente evidente.

Se però ce ne volessimo servire, per es., per determinare le equazioni di una linea di ugual spessore (problema che corrisponde a quello termodinamico delle linee o formule adiabatiche) il simbolo E che in questo caso indicherebbe una funzione sarebbe inutile ed anzi potrebbe indurre in errore, e converrebbe sostituirgli il suo valore $R/[(\partial q/\partial T)_p - (\partial q/\partial T)_v]$ ed inoltre bisognerebbe esprimere queste derivate parziali in funzione delle coordinate.

Se si supponessero $(\partial q/\partial T)_p$ e $(\partial q/\partial T)_v$ costanti, si avrebbe ancora che lo spessore dello strato non è funzione delle coordinate, e che varia a seconda della via seguìta nel passare da un punto all'altro e si ricadrebbe in un problema identico, algebricamente, con quello termodinamico.

Per la stessa ragione una certa equivalenza fra calore e lavoro è implicita nell'equazione dello stato aeriforme $pv = RT$ e nella sua equazione differenziale $pdv + vdp = RdT$, sebbene entrambe (come anche l'equazione del primo principio) possano esser poste sotto forma numerica indipendente dalle unità, la prima scrivendo: $(p/p')(v/v') = T/T'$; la seconda, sostituendo pv/T ad R e dividendo tutto per pv, dimodochè si ha:

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}.$$

La somma delle variazioni della pressione e del volume uguale a quella della temperatura.

Chimica. — *Riduzione con platino e idrogeno dei nitro- e nitrosocomposti* [1]. Nota di GUIDO CUSMANO, presentata dal Socio A. ANGELI [2].

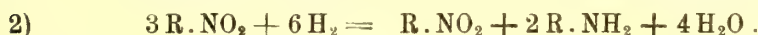
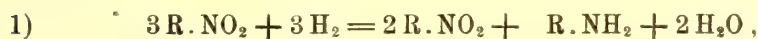
La riduzione dei composti organici con idrogeno e nero di platino, a temperatura ordinaria, fino a oggi ha trovato impiego specialmente nella saturazione dei doppî legami etilenici. La notevole rapidità con cui essa procede e l'agevolezza della sua manualità, mi hanno spesse volte indotto ad applicarla anche alla dealogenazione dei composti organici e alla riduzione dei nitroso- e nitrocomposti.

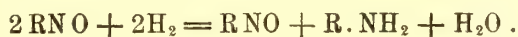
Da esperienze da me fatte eseguire agli studenti, già qualche anno addietro, durante i loro esercizi di preparazioni organiche, raccolgo in questa Nota alcuni dati circa la riduzione di mono-nitroso- e mononitro-composti aromatici e di mononitrosocomposti terpenici. In altra occasione mi occuperò della riduzione catalitica dei poli-nitrocomposti aromatici.

1. Qualunque sia la quantità d'idrogeno messa a reagire, a temperatura ordinaria, con i mononitrocomposti aromatici, questi vengono sempre ridotti ad amine. Se si limita la quantità dell'idrogeno a quella teoricamente occorrente, per ottenere la trasformazione del gruppo nitro nel nitroso o nell'idrossilamminico, si arriva all'amina, mentre una parte del composto di partenza rimane inalterata.

Per il p-nitrofenolo, il p-nitroanisolo, il p-nitrotoluolo si sono verificate queste due equazioni:

$$1)\qquad 3\,R.NO_2 + 3\,H_2 = 2\,R.NO_2 + R.NH_2 + 2\,H_2O\,,$$

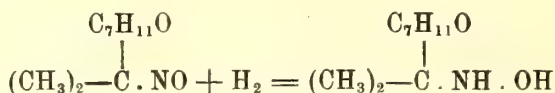
$$2)\qquad 3\,R.NO_2 + 6\,H_2 = R.NO_2 + 2\,R.NH_2 + 4\,H_2O\,.$$

2. Analogo risultato si è avuto per i nitroso-composti aromatici. In presenza di una molecola d'idrogeno, una molecola di essi si riduce per metà ad amina:

$$2\,RNO + 2H_2 = RNO + R.NH_2 + H_2O\,.$$

Si è verificato ciò per il p-nitrosofenolo, per il p-nitrosotimolo, la p-nitrosodimetilanilina, i nitroso-naftoli.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studî superiori di Firenze.

[2] Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1917.

3. Nelle medesime condizioni, invece, una molecola di nitrosocomposto terpenico si riduce, quantitativamente ad idrossilammina. Per es. l'8-nitrosomentone si trasforma nell'8-idrossilamino-mentone:

$$\begin{matrix} C_7H_{11}O \\ | \\ (CH_3)_2\text{—}C.NO \end{matrix} + H_2 = \begin{matrix} C_7H_{11}O \\ | \\ (CH_3)_2\text{—}C.NH.OH \end{matrix}$$

I risultati riferiti, solamente per quanto riguarda i nitrosocomposti terpenici, sono comparabili con quelli forniti dagli ordinarî mezzi di riduzione. Com'è noto, difatti, i metodi puramente chimici e quelli elettrochimici, conducono più di frequente alle β-idrossilammine, che non alle ammine. La trasformazione delle prime nelle seconde richiede maggior dispendio di energia che non il passaggio dai nitrocomposti alle β-idrossilammine: i nitrocomposti aromatici, per mezzo del solfuro ammonico, si trasformano già a freddo nelle β-idrossilammine e a caldo nelle ammine; il nitrobenzolo, elettroliticamente, si riduce non oltre la fenilidrossilammina, se si usa il catodo di platino, e per arrivare all'anilina occorre un catodo di piombo, quindi, un'alta sopratensione.

Per spiegare come con il processo catalitico, da me usato, i nitro- e i nitroso-composti aromatici, anche con deficienza d'idrogeno, si trasformino esclusivamente in ammine, si potrà, intanto, cominciare dall'ammettere che la riduzione si svolga, come per gli altri metodi, secondo lo schema fondamentale

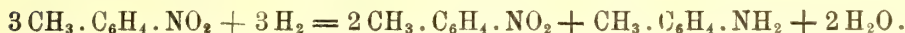
$$R.NO_2 \longrightarrow R.NO \longrightarrow R.NH.OH \longrightarrow R.NH_2.$$

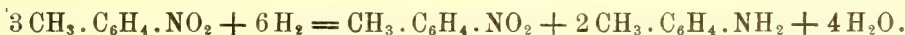
Ovviamente, allora, la formazione delle ammine, *in presenza di un nitro- o di un nitrosocomposto*, sarebbe da riferire al fatto che sotto l'influenza del catalizzatore, le β-idrossilammine, nate in un primo tempo, subiscano la riduzione a preferenza di quelli. Non sarà difficile stabilire se tale spiegazione sia possibile, misurando la velocità di riduzione, con idrogeno e nero di platino, di un nitrocomposto aromatico e della corrispondente β-idrossilammina. Per il momento si è osservato che, agitando in presenza di una molecola d'idrogeno, un miscuglio equimolecolare di p-nitrotoluolo e fenilidrossilammina, in soluzione eterea, il nitrocomposto rimane inalterato e l'altra si trasforma in anilina.

Per eseguire la riduzione dei nitro- e nitroso-composti si operava nel seguente modo. In una bottiglia da 500 cc. munita di un tappo con rubinetto, s'introduceva la soluzione in pochi cc. di etere o di acetone, di gr. 1 a 1,5 del composto da ridurre, insieme con alcuni centigrammi di nero di platino, si toglieva l'aria per mezzo di una comune pompa ad acqua e facevasi entrare la quantità voluta d'idrogeno; infine si metteva a scuotere

la boccia in un agitatore, fino a che l'idrogeno era totalmente consumato. La riduzione, in generale, avveniva in pochi minuti.

Riduzione di una molecola di p-nitrotoluolo con una molecola d'idrogeno. — Gr. 1,5 di p-nitrotoluolo sciolti in cc. 50 d'etere anidro, si agitano in presenza di nero di platino, con cc. 245 di idrogeno (misurati a 0° e 760 mm.). Dopo alcuni minuti si filtra la soluzione eterea e si sbatte con acido solforico diluito. Dallo strato etereo si ricavavano gr. 1,0 di nitrocomposto inalterato; dalla soluzione solforica, alcalinizzata, gr. 0,37 di p-toluidina (calcolato gr. 0,39). La reazione si può, quindi, rappresentare con l'eguaglianza:

$$3\,CH_3 . C_6H_4 . NO_2 + 3\,H_2 = 2\,CH_3 . C_6H_4 . NO_2 + CH_3 . C_6H_4 . NH_2 + 2\,H_2O .$$

Riduzione di una molecola di p-nitrotoluolo con due molecole di idrogeno. — p-nitrotoluolo gr. 1,5, idrogeno cc. 490 (misurato a 0° e 760 mm.). Operando come sopra, si ricavano gr. 0,5 di nitrocomposto inalterato e gr. 0,77 di p-toluidina; ciò che può esprimersi con l'equazione:

$$3\,CH_3 . C_6H_4 . NO_2 + 6\,H_2 = CH_3 . C_6H_4 . NO_2 + 2\,CH_3 . C_6H_4 . NH_2 + 4\,H_2O .$$

Come ho accennato, esperienze analoghe e con gli stessi risultati furono eseguite con il p-nitro-fenolo e il p-nitro-anisolo.

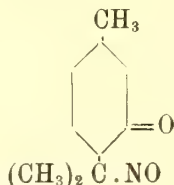
Riduzione del p-nitrosotimolo con la quantità equimolecolare d'idrogeno. — Da gr. 1,8 di p-nitrosotimolo, su cui si fanno agire cc. 270 d'idrogeno (misurati alle condizioni normali), si ricavano gr. 0,9 di composto inalterato e gr. 0,75 (calcolato 0,8) di p-amido timolo.

Riduzione dell'1-nitroso 2-naftolo con la quantità equimolecolare d'idrogeno. — A gr. 1 del composto, sciolto in etere, si fanno assorbire cc. 170 di idrogeno (misurato a 0° e 760 mm.); indi, separato il nero di platino per filtrazione, si aggiunge alla soluzione qualche goccia d'etere saturo di acido cloridrico e si raccoglie rapidamente il precipitato formatosi. Esso è costituito di cloridrato di 1-amino-2-naftolo e pesa, dopo essiccamento, gr. 0,54 (calcolato gr. 0,55). Dalla soluzione eterea primitiva, distillato il solvente si ritrae circa $^1/_2$ gr. di 1-nitroso 2-naftolo inalterato.

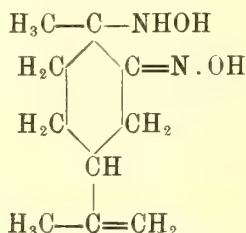
Dal 4-nitroso 1-naftolo e dal p-nitrosofenolo si ebbero gli stessi risultati.

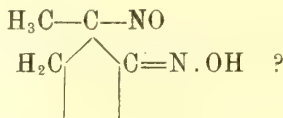
Riduzione della fenilidrossilammina in presenza di p-nitrotoluolo. — Una soluzione eterea di quantità equimolecolari delle dette sostanze cioè di gr. 0,78 della prima e gr. 1 della seconda, si agita con cc. 160 di idrogeno (1 molecola, misurata alle condizioni normali). A reazione compita si filtra per separare il catalizzatore, e si dibatte la soluzione eterea con acido solforico diluito. In questo passa anilina e dallo strato etereo si ricava tutto il nitrotoluolo inalterato.

Riduzione di nitrosocomposti terpenici ad idrossilammine. — Una soluzione eterea di gr. 0,5 (1 mol.) di 8-nitrosomentone

```
        CH3
        /\
       |  |
       |  |=O
        \/
 (CH3)2 C.NO
```

si agita in presenza di cc. 60 d'idrogeno. Immediatamente essa perde il color azzurro, separando cristalli incolori della relativa β-idrossilammina.

Tempo addietro (¹) dall'idrossilammina-ossima

```
   H3C—C—NHOH
   H2C/  \C=N.OH
     |    |
   H2C\  /CH2
       CH
       |
   H3C—C=CH2
```

da me preparata dal nitroso cloruro del limonene, ho ottenuto un derivato che si comporta in modo singolare. Esso si presenta in magnifici cristalli di color giallo-arancio; colora in azzurro la soluzione solforica di fenolo; è notevolmente stabile agli alcali; non si presta a reazioni di condensazione con le funzioni H_2N— , H_2C=, ecc.; trattato con gli acidi cloridrico, solforico e nitrico, comunque concentrati o diluiti si trasforma nell'idrossilammina-ossima originaria. Questa medesima trasformazione, ò avuto oggi modo d'osservare, si compie anche per mezzo della riduzione catalitica: in presenza di platino, una molecola del composto giallo assume una molecola d'idrogeno. Non vi è dubbio, quindi, che il composto è un prodotto d'ossidazione dell'idrossilammina-ossima; e poichè non possiede le proprietà riducenti di questa, l'ossidazione deve essersi svolta sul gruppo —NH.OH. Ma potremo dare al composto giallo la formola

```
   H3C—C—NO
   H2C/  \C=N.OH   ?
     |    |
```

Nitroso-composti terpenici di color giallo non se ne conoscono; e quelli incolori o azzurri descritti (²) non hanno nessuno il comportamento chimico

(¹) Memorie Lincei, 1911, pag. 711.

(²) Bayer A., Berichte d. Deut. Ch. G. *28*, pag. 2293 (1895).

della sostanza ch'io ho trovata. D'altra parte, essa neppure assomiglia ai nitrosocomposti aromatici, i quali, se in particolari condizioni [1] vengono anch'essi trasformati in β-idrossilammine per mezzo dell'acido cloridrico, non sono, però, stabili agli alcali, dànno numerose reazioni di condensazione e ridotti cataliticamente non forniscono le β-idrossilammine, ma, come sopra si è dimostrato, le ammine. Il composto giallo, perciò, richiede ancora qualche ricerca.

Fisica. — *Sul doppio strato elettrico al contatto del mercurio con liquidi organici debolmente conduttori* [2]. Nota I dei proff. V. Polara ed A. Maresca, presentata dal Socio Riccò [3].

1. Lo studio dei fenomeni elettrocapillari ha messo in evidenza la formazione d'un doppio strato elettrico al contatto fra il mercurio e gli elettroliti e, successivamente, con le ricerche di H. Pellat [4] e di Krouchkoll [5], al contatto rispettivamente fra amalgame liquide di zinco o di rame ed elettroliti, e fra elettroliti ed altri liquidi non miscibili.

Nessuna ricerca è stata fatta relativamente ai fenomeni elettrocapillari al contatto fra mercurio (od altri metalli liquidi) e liquidi organici debolmente conduttori, se si prescinde da un fugacissimo accenno fatto dal Reboul [6] per l'alcool, come preliminare alle sue ricerche sui liquidi isolanti ionizzati dall'azione dei raggi X. E comunque, nel lavoro del Reboul (che tende, come quello del Krouchkoll, a generalizzare i fenomeni elettrocapillari, inizialmente studiati solo al contatto mercurio-elettrolita) viene adoperato l'elettrometro capillare come strumento rivelatore e studiate quindi le variazioni della costante capillare.

Nell'intendimento di mettere *direttamente* in evidenza — e non per mezzo di variazioni nella costante capillare — il doppio strato elettrico al contatto, appare opportuno invece il dispositivo ideato dal Lippmann e modificato da H. Pellat [7], che rivela l'esistenza d'una corrente elettrica temporanea attraverso il circuito che collega due elettrodi di mercurio in contatto con il liquido in esame, quando si faccia variare l'estensione di uno di essi.

(1) Möhlau, ibid., *19*, pag. 2013 (1886); Bamberger, Büsdorf, Szolayski, ibid., *32*, pag. 217 (1899).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Catania, diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

(3) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1917.

(4) Pellat, *Cours d'électricité*, tome III, pag. 151.

(5) Krouchkoll, Journal de Physique, 1884, 3, pag. 303.

(6) Reboul, Journal de Physique, 1908, 7, pag. 846.

(7) Pellat, *Cours d'électricité*, tome III, pag. 141.

Tale dispositivo consiste (fig. 1) in un tubo di vetro due volte piegato ad angolo retto, che si svasa da un lato nel serbatoio A_1 e dall'altro, molto bruscamente, nel recipiente A_2: il tubo ed il serbatoio A_2 contengono mercurio per modo che questo giunga nel punto *a* in cui il tubo si svasa bruscamente. Il liquido in esame è contenuto sia nel recipiente A_2 sia nel largo recipiente B, nel quale è disposto sopra ad uno strato di mercurio *b*, e comunica col liquido in A_2 per mezzo del sifone S. I due elettrodi di platino α e β permettono di rilegare il mercurio contenuto nel tubo e nel recipiente B ai serrafili di un galvanometro G.

Abbiamo iniziato la ricerca adoperando della glicerina pura bidistillata ritirata tempo fa dalla Casa Paganini, Villani e C.[i] dal Direttore di questo Laboratorio, e da lui gentilmente messa a nostra disposizione.

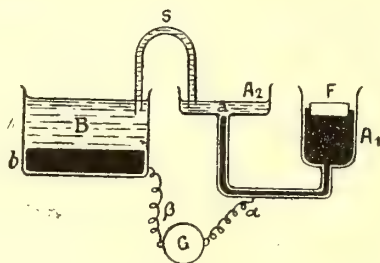



Fig. 1.

Intercalando nel circuito in G un galvanometro a magnete fisso Ayrton e Mather a grande (10000 Ohm) o a piccola (4 Ohm) resistenza, all'atto in cui si faceva variare la superficie dell'elettrodo di mercurio *a*, premendo sul galleggiante di legno F, non si notava alcuna deviazione al galvanometro. Sostituendo a tale galvanometro un *balistico* a magnete fisso della Casa Carpentier, si osservava invece una notevole deviazione verso i numeri rossi della scala (da 15 a 20 piccole divisioni della scala posta a circa m. 1,20 dallo specchietto, a seconda la diversa pressione esercitata sul galleggiante e la rapidità con cui avveniva la variazione di superficie dell'elettrodo di mercurio *a*) che andava aumentando a misura che il mercurio occupava una più larga estensione nella vaschetta A_2: successivamente l'equipaggio, dopo aver compiuto un certo numero di oscillazioni, ritornava alla sua posizione iniziale d'equilibrio.

Il senso della deviazione, esplorato direttamente, indicava un passaggio d'elettricità da β verso α attraverso il galvanometro, cioè, conformemente a quanto accade nel caso degli elettroliti, dall'elettrodo rimasto invariato a quello la cui superficie veniva accresciuta.

L'opportunità dell'uso del balistico appare evidente se si considera che, data la grande resistenza del liquido (glicerina, alcool ecc.), la corrente tem-

poranea variabile che si stabilisce, all'atto della variazione di superficie del piccolo elettrodo di mercurio a, nel circuito è di piccolissima intensità media, mentre la quantità d'elettricità che circola complessivamente in tutto il tempo per cui varia la superficie del mercurio in a, in rapporto alla durata, non brevissima, con cui il mercurio invade la vaschetta A_2 ($q = i_m t$) è più notevole: occorre quindi un galvanometro che dia l'indice della quantità d'elettricità che attraversa complessivamente il circuito, cioè un balistico, il quale abbia inerte l'equipaggio in rapporto al tempo complessivo impiegato dal mercurio per invadere tutta la vaschetta, in guisa che esso possa ricevere, sensibilmente, tutti gli impulsi mentre trovasi ancora nella posizione di riposo.

La spiegazione del fenomeno, perfettamente analoga a quella data dal Pellat ([1]) per il caso degli elettroliti, è da ricercare nella formazione d'un doppio strato elettrico al contatto fra mercurio e glicerina, essendo il mercurio elettrizzato positivamente e la glicerina negativamente: aumentando la superficie dell'elettrodo di mercurio a, diminuisce la densità del corrispondente doppio strato (dovendo una stessa carica distribuirsi su una più vasta estensione) e corrispondentemente, per la diminuzione di potenziale dell'elettrodo α rispetto a β, una quantità d'elettricità $q = X . \Delta S$ (X densità del doppio strato, ΔS variazione della superficie) circolerà nel senso precedentemente indicato per ristabilire l'equilibrio dei potenziali fra i due elettrodi, temporaneamente turbato dalla variazione di superficie di a.

Abbiamo voluto allargare il campo della ricerca, malgrado le gravissime difficoltà cui si va incontro in questo periodo eccezionale nel procurarsi prodotti puri, ed abbiamo sottoposto ad esperimento l'alcool etilico e la benzina resa lievemente conduttrice con l'aggiunta di piccola quantità d'alcool.

Con l'alcool etilico abbiamo avuto al galvanometro, all'atto in cui s'è fatto variare la superficie dell'elettrodo di mercurio a, da 8 a 12 piccole divisioni verso i numeri rossi della scala, con le solite lievi incertezze dovute alle inevitabili irregolarità della pressione esercitata sul galleggiante.

Il miscuglio di benzina ed alcool conteneva 30 parti in volume di benzina e 10 di alcool: il balistico, perfettamente fermo inizialmente, segnava ancora in questo caso, in cui il liquido ha una conducibilità elettrica ben piccola, una netta deviazione dalla parte dei numeri rossi della scala di 2 o 3 piccole divisioni, quando si faceva variare la superficie del mercurio in a.

Interessante sarebbe forse adoperare dell'etere etilico reso debolmente conduttore con lo sciogliervi piccole quantità d'acido cloridrico anidro, giacchè, secondo le ricerche del Cattaneo ([2]), tale soluzione presenta una conducibilità elettrica minima. Ma siamo stati costretti a rinviare a tempi migliori

([1]) Pellat, *Cours d'électricité*, tome III, pag. 145.
([2]) Cattaneo, Rend. R. Acc. Lincei [V], 2, pag. 295.

la ricerca per l'impossibilità di procurarci, in quantità sufficiente, i prodotti che ci sarebbero occorsi.

Abbiamo infine tentato di mettere in evidenza il fenomeno adoperando dell'olio di vasellina commerciale (poichè non ne abbiamo trovato puro) e sottoponendolo all'azione ionizzante dei raggi X per renderlo debolmente conduttore. Ma si è constatato che delle cariche, o per induzione — malgrado si sia rinchiuso il tubo generatore in una cassa foderata di piombo in comunicazione col suolo, e si sia tappato il foro d'uscita dei raggi con una lamina di alluminio spessa mm. 0,5 — o per azione stessa dei raggi X [1] si determinano nel circuito comprendente il balistico: tali cariche, all'atto della variazione di superficie dell'elettrodo di mercurio a, si mettono in circuito, per la variata capacità di questo elettrodo, e turbano l'osservazione della deviazione al galvanometro dovuta eventualmente alla variazione di densità del doppio strato. Occorre quindi ritentare la prova adoperando più opportuni mezzi ionizzanti.

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.* Nota III di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

1. Come fu detto, noi ci proponiamo di esaminare se le perturbazioni del satellite di Nettuno possano essere prodotte — come sembra supporre lo Struve — dall'attrazione di un secondo satellite perturbatore, rimasto ancora sconosciuto a cagione della sua piccola massa. A tale scopo abbiamo indicato con m, a, n, ω, i, la massa, la distanza e il moto medio, il nodo e l'inclinazione del satellite noto e con le medesime lettere accentate, m', a', n', ω', i', i corrispondenti elementi dell'ipotetico satellite perturbatore. Abbiamo poi adottato come unità di misura il giorno solare medio, il semidiametro equatoriale e la massa di Nettuno, e come piano di riferimento (rispetto al quale contiamo i nodi e le inclinazioni) quello che nella teoria del Tisserand si considera come piano equatoriale di Nettuno, e che, nell'ipotesi in cui ci siamo posti, è invece il piano invariabile del sistema formato dal pianeta e dai due satelliti.

Riferendoci al caso II in cui il satellite perturbatore si supponeva esterno, avevamo posto $\alpha = \frac{a}{a'}$, donde $\alpha < 1$.

2. Ritenendo sempre l'eccentricità trascurabile e l'inclinazione non grande (p. es. $i' \leq 30°$) vedemmo nella Nota II che il massimo valore di α,

(1) Righi, Rend. Acc. Bologna, 9 febbraio ed 8 marzo 1896.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1917.

che indicheremo con α_1, e quindi il massimo valore di n', che avevamo indicato con ν, si otteneva risolvendo l'equazione trascendente:

$$\nu\lambda(\alpha_1) = \frac{\gamma n}{m(1+2\,\mathrm{sen}\,i)} \tag{1}$$

dove si ha:

$$\gamma = -\frac{\pi}{n}\cdot\frac{d\omega}{dt} \tag{2}$$

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{n^2}} \tag{3}$$

$$\lambda(\alpha_1) = \frac{1}{1-\alpha_1^2}\left[\frac{1+\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\alpha_1^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta}\,d\vartheta - \int_0^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha_1^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta}}\right]. \tag{4}$$

Eliminando allora ν tra la (1) e la (3) e sostituendo al posto di λ e di γ i loro valori, risulta:

$$-\frac{\pi}{mn(1+2\,\mathrm{sen}\,i)}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\alpha_1^{3/2}}{1-\alpha_1^2}\left\{\frac{1+\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\alpha_1^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta}\,d\vartheta - \int_0^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha_1^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta}}\right\}. \tag{5}$$

3. Ora dalle recenti osservazioni del Dyson [1] risulta:

$$i = 16^\circ \quad ; \quad n = 61^\circ{,}2622\,. \tag{6}$$

Quanto ad m, in mancanza di altri dati, mi sono servito per calcolarlo delle osservazioni fotometriche del Pickering [2], da cui risulta che il satellite noto, ammettendo che abbia la stessa *albedine* di Nettuno, ha un diametro di circa 3630 km. Supponendo allora che la sua densità media sia uguale a quella del pianeta da cui dipende, abbiamo:

$$m = 0{,}000291\,. \tag{7}$$

4. Resta a calcolare la quantità $\frac{d\omega}{dt}$, ciò che faremo con considerazioni puramente cinematiche.

[1] Vedi Nota I. Questi Rendiconti, anno 1915, semestre 1°, pag. 573.

[2] Cfr. *Harvard Photometry*. Il Pickering stima la grandezza di Nettuno all'opposizione uguale a 7,66 e quella del suo satellite uguale a 13,59.

Cominciamo a ricordare che l'osservazione ci mostra che il polo P dell'orbita del satellite noto descrive un cerchio intorno ad un punto fisso S, — che è il polo del piano invariabile — le cui coordinate, ascensione retta e declinazione, sono approssimativamente:

$$A_1 = 288^\circ \quad ; \quad D_1 = 40 . \tag{8}$$

L'arco PS è di circa 16°, e la posizione del punto P all'epoca 1903,1 aveva per coordinate:

$$A_2 = 277{,}5 \quad ; \quad D_2 = 27{,}4 . \tag{9}$$

Chiamando allora con O il polo Nord della sfera celeste e con φ e ψ gli angoli in O e in S abbiamo dal triangolo sferico POS:

$$\cos PS = \cos PO \cos SO + \operatorname{sen} PO \operatorname{sen} SO \cos \varphi \tag{10}$$

$$\cos \psi = \frac{\cos PO - \cos PS \cos SO}{\operatorname{sen} PS \operatorname{sen} SO} . \tag{11}$$

Derivando la (10) e la (11) rispetto al tempo ed osservando che SO e PS sono costanti, si ha:

$$\operatorname{sen} PO \frac{d(PO)}{dt} = \operatorname{tg} SO \left\{ \cos \varphi \cos PO \frac{d(PO)}{dt} - \operatorname{sen} PO \operatorname{sen} \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right\} \tag{12}$$

$$\operatorname{sen} PO \frac{d(PO)}{dt} = \operatorname{sen} SO \operatorname{sen} PS \operatorname{sen} \psi \frac{d\psi}{dt} . \tag{13}$$

Uguagliando allora i secondi membri della (12) e (13) e ricordando che ω è il nodo ascendente del satellite noto col piano invariabile, cioè precisamente col piano che ha per polo P, si ha con qualche riduzione:

$$-\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\operatorname{sen} PO \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} PS \operatorname{sen} \psi (\operatorname{cotg} PO \cos \varphi \operatorname{sen} SO - \cos SO)} \frac{d\varphi}{dt} . \tag{14}$$

Il lettore se ne persuaderà facilmente eseguendo la figura ed osservando che il senso della rotazione di P intorno ad S risulta contrario a quello del moto del satellite noto che abbiamo assunto come positivo.

Ora dai dati sopra riportati risulta per l'epoca 1903,1

$$PO = 62^\circ{,}6 \quad ; \quad SO = 50^\circ . \tag{15}$$

D'altra parte, per immediate considerazioni geometriche, si ha alla stessa epoca:

$$\varphi = A_1 - A_2 = 10^\circ{,}5 \tag{16}$$

$$A_2 = N + \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

dove, come abbiamo fatto nella Nota I, indichiamo con N il nodo ascendente dell'orbita del satellite noto rispetto all'equatore celeste.

Eseguendo allora i calcoli otteniamo dalla (11):

$$\psi = 138°,3 . \tag{18}$$

Ora, come vedemmo nella Nota I, l'osservazione ci dà:

$$N = 185°,15 + 0°,148\,(t - 1890) \tag{19}$$

dove il tempo t è misurato in anni giuliani.

Sostituendo nella (16), derivando tenendo presente che A_1 è costante e *prendendo per unità il giorno solare medio*, come abbiamo stabilito, risulta:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\,0°,0004052 . \tag{20}$$

Conoscendo così tutte le quantità che entrano nel secondo membro della (14), abbiamo:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\,0°,0014172 . \tag{21}$$

Osserviamo di passaggio che se la velocità angolare $\frac{d\omega}{dt}$ si mantenesse costante, il punto P compirebbe una rotazione intorno ad S in 696 anni; ciò che è in perfetto accordo con quanto stima il Dyson [1]. Il Tisserand invece, con altri calcoli e fondandosi su osservazioni antiquate, trova dei valori molto maggiori: da 1060 a 1680 anni [2].

5. Con questi dati la (5) diviene:

$$\alpha_1^{3/2}\,\lambda(\alpha_1) = 0.16079 . \tag{22}$$

Ma nella Nota II abbiamo dimostrato che il primo membro della (22) è una funzione crescente dell'argomento, la quale varia da 0 ad ∞ quando α_1 va da 0 ad 1. La (22) ammetterà perciò una ed una sola radice reale e positiva, che noi potremo ottenere con metodi analoghi ai metodi di Newton e Horner per le equazioni algebriche. Fatti i calcoli si ha:

$$\alpha_1 = 0,41866 . \tag{23}$$

E poichè la distanza media a del satellite noto è uguale a 13,33 risulta:

$$a' = 31,84 \quad ; \quad \nu = 16°,595 . \tag{24}$$

[1] Vedi Monthly, *Notices*, anno 1905, pag. 570.

[2] Tisserand, *Méc. Cél.* IV, pag. 147. Il Tisserand mescola ancora, in modo non troppo elegante, il lato *cinematico* col lato *dinamico* della questione.

Nell'ipotesi che il satellite perturbatore sia esterno, è questo dunque il *minimo valore ammissibile per la sua distanza media*, a cui corrisponde, come dimostrammo, il *minimo valore* μ *per la sua massa*. Riprendendo allora l'equazione ottenuta nella Nota II:

$$\mu = 2m \sqrt[3]{\frac{\nu}{n}} \operatorname{sen} i \,; \tag{25}$$

ed eseguendo i calcoli, si ha

$$\mu = 0{,}000104 \,. \tag{26}$$

Vediamo dunque che la massa del satellite perturbatore risulta, nella peggiore ipotesi, maggiore della terza parte della massa del satellite noto.

Se noi supponiamo che esso abbia la stessa *albedine* del pianeta principale, potremo facilmente calcolare la grandezza fotometrica G, quando Nettuno è all'opposizione. Fatti i calcoli si ha:

$$G = 14{,}34 \tag{27}$$

cioè: lo *splendore dell'ipotetico satellite perturbatore, sarebbe, al minimo, di poco inferiore a quello del satellite noto la cui grandezza fotometrica è 13,59. Ne risulta che esso non potrebbe essere sfuggito alle nostre osservazioni, tanto più che, per la sua maggior distanza da Nettuno, le sue condizioni di visibilità sarebbero assai migliori. Possiamo quindi concludere che l'ipotesi che l'orbita del supposto satellite sia esterna, deve essere esclusa.*

Nella prossima Nota esamineremo il caso in cui si supponga l'orbita interna.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 4°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXV. (1892-1916).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 4.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-5.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 5.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 5°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Geodesia. — *Sulla determinazione della forma del Geoide mediante misure di gravità.* Nota del Corrispondente E. Almansi [1].

1. Io riprendo in esame, in questa Nota, un problema che è già stato oggetto d'importanti ricerche, e che presenta indubbiamente un grande interesse, anche se lo stato attuale dei dati d'osservazione non permette d'applicare la formula risolutiva [2].

Nella determinazione teorica della forma del Geoide — vale a dire della superficie equipotenziale che passa per un dato punto del livello medio del mare — si trascura l'azione esercitata sulla Terra dai corpi celesti, si trascurano le variazioni di forma che il Geoide subisce da istante a istante; e finalmente si considera la Terra come animata soltanto da un movimento di rotazione.

È da notare che non avendo in realtà la Terra nessun punto fisso nello spazio, è determinata in ogni istante la direzione D dell'asse di rotazione, non la sua posizione. Per convenzione noi diciamo asse di rotazione della Terra la retta Z di direzione D che passa per il baricentro O del sistema; e facciamo l'ipotesi che la forma del Geoide sia sensibilmente quella stessa che esso avrebbe se il sistema fosse animato soltanto da un moto di rotazione intorno all'asse Z.

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1917.

[2] Seguirò in parte il procedimento indicato dal prof. P. Pizzetti nei suoi *Principii della Teoria meccanica della figura dei Pianeti,* Cap. VIII. Vedasi anche la Nota ivi citata a pag. 119.

Riguardo al grado di approssimazione, considerata la costante γ della formola (3) come una quantità piccola del primo ordine, γ^2 del secondo, ecc., riterremo trascurabili rispetto all'unità le quantità piccole d'ordine superiore al secondo.

Supporremo nota, solo per chiarezza d'esposizione, una dimensione L del Geoide.

2. La forma del Geoide G, nel nostro ordine di approssimazione, si saprebbe determinare, se tutto il sistema rotante T fosse contenuto nell'interno di G, e si conoscesse in ogni punto di G la grandezza della gravità. Non essendo verificate queste condizioni, noi dovremo costruire, innanzi tutto, un sistema ideale T', rotante intorno allo stesso asse di rotazione del sistema reale T e con ugual velocità angolare, pel quale G sia ancora una superficie d'equilibrio, *ma la cui massa sia tutta contenuta nell'interno di* G; e per questo sistema T' determinare, nei punti di G, la gravità g'.

Denotiamo con m le masse che nel sistema reale T si trovano *fuori del Geoide*. Per passare dal sistema T al sistema T' basterà immaginare di sopprimere le masse m, e di distribuire nell'interno di G delle masse m', il cui potenziale, nei punti di G, sia uguale al potenziale delle masse m: ciò che teoricamente è sempre possibile. Praticamente, potremo immaginare sostituita ad ogni massa elementare esterna dm, una massa interna dm' uguale, situata sulla normale al Geoide condotta per dm, e che disti dal Geoide quanto ne dista la massa dm.

Sia V il potenziale newtoniano della Terra (inclusa la costante della gravitazione). Il potenziale newtoniano del sistema T' sarà

$$V' = V - v + v',$$

v e v' essendo rispettivamente i potenziali newtoniani delle masse m ed m'. Se all'uno e all'altro membro dell'equazione aggiungiamo il potenziale della forza centrifuga, e diciamo U il potenziale totale della Terra, U' il potenziale totale del sistema T', avremo

$$U' = U - v + v'.$$

Per un punto P della superficie fisica della Terra conduciamo la normale n al Geoide, la quale incontri il Geoide nel punto G. E poniamo, considerando n positiva verso il basso,

$$g = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_P \quad , \quad g' = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G .$$

Le osservazioni ci fanno conoscere g, che si confonde colla grandezza della gravità nel punto P (potendosi ritenere piccolo del 2° ordine l'angolo che la verticale in P forma con n, quindi il suo coseno uguale ad 1), e noi vogliamo determinare la gravità g'.

Sostituendo, nella prima di queste formule, ad U il suo valore $U' + v - v'$, si ha

$$g = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P + \delta,$$

ove

$$(1) \qquad \delta = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_P - \left(\frac{\partial v'}{\partial n}\right)_P;$$

quindi, sottraendo membro a membro dalla seconda

$$g' - g = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P - \delta.$$

Posto

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P = k' \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G = k' g',$$

il coefficiente k', che dipende dal potenziale U' del sistema T', racchiuso dal Geoide e pel quale il Geoide è una superficie d'equilibrio, si può calcolare con sufficiente approssimazione considerando il Geoide come un ellissoide di forma e dimensioni note, e ritenendo pure nota l'altezza PG. Avremo allora dalle due ultime formule

$$g' - g = k' g' - \delta,$$

quindi

$$g' = \frac{g - \delta}{1 - k'},$$

od anche, per la piccolezza di k' e δ, ponendo $k = k' + k'^2$,

$$(2) \qquad g' = (1 + k) g - \delta.$$

Il termine δ, come apparisce dalla formola (1), rappresenta *la differenza fra le componenti secondo la normale n delle attrazioni esercitate nel punto* P *dalle masse m e dalle masse m'*. Nel calcolo di δ il Geoide si può considerare come una sfera.

Devo osservare che nelle formole ordinariamente adoperate per la riduzione della gravità al livello del mare, non figura questo termine. Io non vedo però come la gravità g', calcolata in modo diverso da quello qui accennato (salvo a trascurare ancora, nella sua espressione, termini piccolissimi), possa condurre alla conoscenza della forma del Geoide, essendo essenziale nel nostro problema definire g' in maniera che sulla superficie G essa rappresenti la gravità relativa ad un sistema *pel quale* G *è una superficie d'equilibrio.*

3. Siano φ_1 e θ_1 la latitudine e la longitudine astronomiche dei punti P della superficie fisica della Terra.

Le osservazioni ci daranno g, e perciò g', espresse in funzioni di φ_1 e θ_1. Porremo

$$g' = g'' + \Delta g\,,$$

$$g'' = g_0 \{ 1 + \gamma \operatorname{sen}^2 \varphi_1 + \gamma' \operatorname{sen}^2 2\varphi_1 \}\,, \tag{3}$$

e determineremo le costanti g_0, γ, γ' in maniera che i valori di g'' siano quanto più è possibile vicini ai corrispondenti valori di g'.

Detta Σ una sfera di centro O, stabilita una corrispondenza fra i punti $P(\varphi_1, \theta_1)$ e i punti della sfera di latitudine e longitudine geometriche φ_1, θ_1, e posto

$$\gamma_0 = g_0 \gamma \quad , \quad \gamma'_0 = g_0 \gamma'\,,$$

quindi

$$\Delta g = g' - g_0 - \gamma_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 - \gamma'_0 \operatorname{sen}^2 2\varphi_1\,,$$

teoricamente noi possiamo supporre attribuiti alle tre costanti g_0, γ_0, γ'_0 valori tali da rendere minima la quantità

$$\int_\Sigma \overline{\Delta g}^2 \, d\Sigma\,.$$

Risulterebbe allora, dall'annullare la sua derivata rispetto a g_0,

$$\int_\Sigma \Delta g \, d\Sigma = 0\,. \tag{4}$$

Supporremo verificata questa condizione; ciò che semplifica le formule.

Ritenendo la costante γ piccola del primo ordine (§ 1), la γ' si può ritenere del secondo.

Nella espressione di g'', a causa dei fattori γ e γ', potremo ora considerare φ_1 come la latitudine dei punti G del Geoide. Ed anche nella funzione Δg di θ_1 e φ_1 supporremo che θ_1 e φ_1 si riferiscano ai punti di questa superficie.

4. La determinazione teorica della forma del Geoide si può ridurre a determinare i segmenti SG intercetti sulle normali al Geoide, dal Geoide stesso e da uno sferoide di riferimento S, rappresentato dall'equazione

$$r = a \{ 1 - \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi - \alpha' \operatorname{sen}^2 2\varphi \}\,, \tag{5}$$

ove r denota il raggio vettore uscente da O, φ il complemento dell'angolo che r forma coll'asse di rotazione Z. Alla costante a si attribuirà un valore fornito dalle osservazioni per il raggio equatoriale del Geoide considerato come un ellissoide.

Determineremo le costanti α ed α' ponendo la condizione che per un sistema T'', rotante intorno a Z colla velocità angolare della Terra, limitato da S, e pel quale S è una superficie d'equilibrio, la gravità nei punti di S sia uguale a g'', nella cui espressione (3) si consideri φ_1 come il complemento dell'angolo che formano con Z le normali ad S.

Le costanti α, α' si possono allora calcolare applicando le formule che ho dato in una Nota precedente [1].

L'equazione (5), nel nostro grado di approssimazione, può, in particolare, rappresentare un ellissoide; ma in tal caso il valore della costante α' dipende da quello di α.

5. Costruito lo sferoide S, poniamo

$$s = \pm \mathrm{SG},$$

adottando il segno + o il segno — secondochè il punto G del Geoide si trova fuori dello sferoide, o nel suo interno.

Il rapporto s/a si supporrà piccolo del secondo ordine, o d'ordine maggiore. Così pure l'angolo che la normale n al Geoide nel punto G forma colla normale allo sferoide nel punto S. Potremo allora ritenere che la gravità g'' relativa al sistema T'' sia la derivata del potenziale di T'' rispetto ad n; e nella sua espressione (3) considerare di nuovo φ_1 come la latitudine di G.

Sia V'' una funzione regolare in tutto lo spazio, escluso il punto O, la quale sullo sferoide S e nello spazio esterno rappresenti il potenziale newtoniano del sistema T'' limitato da S (ossia la funzione V della Nota precedente). E poniamo

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V}'' + g_0 u. \tag{6}$$

[1] *Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità*, Rendic. Acc. Lincei, marzo 1917.

Come osservo a pag. 359, il procedimento da me seguìto non differisce sostanzialmente da quello che ha seguìto l'Helmert; il quale però non arriva alle formule (4) della mia Nota, ma si arresta ad un sistema di equazioni non risoluto rispetto alle due incognite che io denoto con α ed α'. L'arrestarsi a questo sistema sarebbe ragionevole se un procedimento per successive approssimazioni permettesse di determinare α ed α' a meno di termini piccoli ad arbitrio. Ma il modo come le equazioni di Helmert sono ottenute mostra che non si può spingere il calcolo oltre i termini del secondo ordine. Ed allora non v'è ragione per non dare, in questo grado di approssimazione, le espressioni definitive di α ed α' in funzione di quantità note. Si ottengono così le mie formule (4); le quali, come il prof. Pizzetti ha verificato in una sua Nota (ved. questi Rendiconti, maggio 1917), concordano pienamente con quelle di Helmert.

Se poi io ho esposta per intero la risoluzione del problema, ciò ho fatto perchè ritenevo, e ritengo, che il mio metodo presenti qualche vantaggio, e possa essere utilmente applicato in problemi analoghi.

Sul Geoide, e nello spazio esterno, potremo considerare $g_0 u$ come il potenziale di masse distribuite irregolarmente, entro il Geoide, *nel sistema ideale* T'.

Se aggiungiamo ad ambedue i membri dell'equazione il potenziale V_0 della forza centrifuga, e diciamo U', come nel § 2, il potenziale totale del sistema T', U'' la funzione $V'' + V_0$, che sullo sferoide S e nello spazio esterno rappresenta il potenziale totale di T'', avremo

$$U' = U'' + g_0 u. \tag{7}$$

Per la piccolezza dei segmenti s, e per la regolarità di U'', potremo ritenere

$$U''_S - U''_G = \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_G . s \;,\; \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_S - \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_G = \left(\frac{\partial^2 U''}{\partial n^2}\right)_G . s , \tag{8}$$

e nei secondi membri sostituire U'' col suo primo termine $\frac{a^2 g_0}{r}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ con $-\frac{\partial}{\partial r}$, ed eseguite le derivazioni, r con a. I secondi membri diventano allora uguali a $g_0 s$ e $2g_0 \frac{s}{a}$. Si ha poi dalla formula (7)

$$U''_G = U'_G - g_0 u_G \;,\; \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_G = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - g_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G .$$

Onde le formule (8) diverranno:

$$U''_S - U'_G + g_0 u_G = g_0 s \quad , \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_S - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G + g_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G = 2g_0 \frac{s}{a} .$$

Diciamo $g_0 C'$ e $g_0 C''$ i valori costanti di U' sul Geoide, e di U'' sullo sferoide. Sarà $U'_G = g_0 C'$, $U''_S = g_0 C''$. A $\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G$ e $\left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_S$ sostituiamo g' e g''. Posto $C' - C'' = c$,

$$g' - g'' = \Delta g = g_0 \psi , \tag{9}$$

e diviso tutto per g_0, abbiamo

$$-c + u_G = s \quad , \quad -\psi + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G = 2 \frac{s}{a} . \tag{10}$$

Quindi, eliminando s,

$$2u_G - a\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G = -a\psi + 2c . \tag{11}$$

Osserviamo che nel passaggio dal sistema T al sistema T', vale a dire nella sostituzione delle masse m' alle masse m, il baricentro, come dimo-

strerebbe facilmente un calcolo approssimato, subisce uno spostamento assolutamente trascurabile. Perciò noi potremo considerare il punto O come il baricentro del sistema T'. Nello sviluppo in serie, per funzioni sferiche, del potenziale V' (nello spazio esterno) mancherà allora il termine in $1/r^2$. Anche nella espressione di V'' manca questo termine (V. Nota prec.). Per la formula (6) esso mancherà pure in u.

6. Nell'applicare la formula (11) noi possiamo sostituire al Geoide la sfera Σ di centro O e di raggio a. Dovrà dunque aversi su questa sfera

$$2u + a\frac{\partial u}{\partial r} = -a\psi + 2c \text{ (1)}.$$

Poniamo ora

$$\omega = u - \frac{2ac}{r}.$$

Si avrà, pure sulla sfera,

$$(12) \qquad 2\omega + a\frac{\partial \omega}{\partial r} = -a\psi.$$

E per la prima delle formule (10)

$$(13) \qquad s = \omega + c.$$

Nello spazio esterno la funzione ω, al pari della u, si comporterà come un potenziale di masse contenute entro la sfera. Ed anche nello sviluppo in serie di ω mancherà il termine in $1/r^2$.

Denoti ω' un'altra funzione che nello spazio esterno presenti i caratteri di un potenziale di masse contenute entro la sfera. Per il teorema di Green sarà

$$\int_\Sigma \omega' \frac{\partial \omega}{\partial r} d\Sigma = \int_\Sigma \omega \frac{\partial \omega'}{\partial r} d\Sigma ;$$

onde l'equazione (12), moltiplicata per $\omega' d\Sigma$ e integrata, darà

$$(14) \qquad \int_\Sigma \left(2\omega' + a\frac{\partial \omega'}{\partial r}\right) \omega \, d\Sigma = -a \int_\Sigma \psi \, \omega' d\Sigma .$$

In particolare, facendo $\omega' = 1/r$, avremo

$$\int_\Sigma \omega \, d\Sigma = -a \int_\Sigma \psi \, d\Sigma .$$

Ma per le formule (4) e (9)

$$(15) \qquad \int_\Sigma \psi \, d\Sigma = 0 .$$

(1) Ved. Pizzetti, loc. cit., prima formula del § 50.

Sarà dunque

$$\int_{\Sigma} \omega \, d\Sigma = 0 .$$

Ciò significa che nello sviluppo in serie di ω manca il termine in $1/r$. Ma si è veduto che vi manca pure il termine in $1/r^2$. Col tendere di r all'infinito, $r^2\omega$ tende dunque a zero.

Questa condizione, e l'altra espressa dalla formula (12), rendono pienamente determinato, sulla sfera e nello spazio esterno, il potenziale ω.

Dalla formula (13) avremo poi gli scostamenti s dei punti del Geoide dallo sferoide S, a meno della costante addittiva c; la quale sarà determinata dalla condizione che la dimensione L del Geoide assuma il valore assegnato (§ 2).

7. Per la determinazione di ω giova l'osservazione del prof. Pizzetti (loc. cit., pag. 118) che la funzione

$$\omega_1 = 2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r} , \tag{16}$$

la quale sulla sfera Σ, per la formula (12), diventa uguale a $-a\psi$, si comporta, nello spazio esterno, come un potenziale di masse contenute entro la sfera.

Sia P un punto dello spazio esterno, ϱ la distanza di P da un punto qualunque A di Σ. Sarà nel punto P

$$\omega_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{r^2 - a^2}{\varrho^3} \psi \, d\Sigma .$$

Detto η l'angolo che OA forma con OP, se si pone

$$F = 2\frac{r^2}{\varrho} - 3\varrho - 3a\cos\eta \, . \log(r + \varrho - a\cos\eta) , \tag{17}$$

e si tien conto della relazione

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\eta ,$$

si trova

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{r^2 - a^2}{\varrho^3} r .$$

Sarà quindi nel punto P

$$r\omega_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial F}{\partial r} \psi \, d\Sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\Sigma} F \psi \, d\Sigma .$$

Ma dalla formula (16) si ricava

$$r\omega_1 = \frac{\partial (r^2\omega)}{\partial r}.$$

Onde sarà

$$\frac{\partial (r^2\omega)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma F\psi\, d\Sigma\right\};$$

e per conseguenza

$$r^2\omega = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma F\psi\, d\Sigma + K \quad (^1), \tag{18}$$

ove K denota una quantità costante per tutti i punti P dello spazio esterno, situati sopra una retta p uscente da O.

Ora K è uguale a zero. Infatti, col tendere di r all'infinito, $r^2\omega$ tende a zero (§ 6). Ed anche l'integrale esteso a Σ tende a zero. Ciò si riconosce facilmente ponendo

$$F = -r + 5a\cos\eta - 3a\cos\eta\log 2r + \varepsilon,$$

ove ε, come risulta dalla formula (17), tende a zero col crescere di r; e tenendo poi conto della formula (15), e dell'altra

$$\int_\Sigma \psi\cos\eta\, d\Sigma = 0. \tag{19}$$

Questa seconda formula si può ottenere assumendo la retta p come asse delle x, e facendo nella (14) $\omega' = \frac{x}{r^3}$. Il primo membro si annulla; sulla sfera $x = a\cos\eta$. D'onde la formula precedente.

Sarà dunque per la (18), nel punto P, vale a dire in un punto qualunque dello spazio esterno,

$$\omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int_\Sigma F\psi\, d\Sigma.$$

Se ora facciamo tendere P verso un punto A_0 della sfera, l'integrale esteso a Σ ha per limite il valore, finito e determinato benchè F in A_0 diventi infinito, che l'integrale assume facendo in F $r = a$, quindi $\varrho = 2a\,\text{sen}\,\frac{\eta}{2}$. Onde avremo sulla sfera, posto $G = \frac{F_{r=a}}{a}$,

$$\omega = \frac{1}{4\pi a}\int_\Sigma G\psi\, d\Sigma.$$

(1) Pizzetti, loc. cit., formula (23).

Dalla formula (17) si ricava

$$G = \operatorname{sen}^{-1}\frac{n}{2} - 6\,\operatorname{sen}\frac{n}{2} - 3\cos\eta\left\{\log\left(\operatorname{sen}\frac{n}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{n}{2}\right) + \log 2a\right\}.$$

Ma sostituendo nella precedente, il termine $-3\log 2a\,.\cos\eta$, per la (19), dà luogo ad un termine nullo. Quindi, ponendo

$$H = \operatorname{sen}^{-1}\frac{n}{2} - 6\,\operatorname{sen}\frac{n}{2} - 3\cos\eta\,.\,\log\left(\operatorname{sen}\frac{n}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{n}{2}\right).$$

otterremo finalmente:

$$\omega = \frac{1}{4\pi a}\int_\Sigma H\psi\,d\Sigma\,.$$

8. Aggiungerò ancora un'osservazione.

Riprendiamo l'espressione (2) della gravità ridotta:

$$g' = (1 + k)\,g - \delta\,.$$

Possiamo porre

$$\delta = \sigma - \sigma'\,, \tag{20}$$

ove σ e σ' rappresentano le componenti verticali (o, se vogliamo, normali al Geoide) delle attrazioni esercitate nel punto P dalle masse esterne m, e dalle masse m' (masse m rovesciate). Diciamo poi σ_1 la componente verticale dell'attrazione che eserciterebbe nel punto P una massa distribuita nello spazio occupato dai mari con densità uguale alla differenza fra la densità media della crosta terrestre, e la densità dell'acqua. Togliendo ed aggiungendo il termine σ_1, avremo

$$\delta = (\sigma - \sigma_1) - \sigma' + \sigma_1\,.$$

Il termine fra parentesi rappresenta la componente verticale dell'attrazione esercitata nel punto P da masse corrispondenti a irregolarità *visibili* nella distribuzione della massa terrestre. L'intero termine δ rappresenterebbe la componente verticale dell'attrazione dovuta a *tutte* le irregolarità della massa terrestre, se oltre alle irregolarità visibili si avessero, nelle regioni sottostanti alle masse che emergono dal Geoide, ed ai mari, difetti ed eccessi di materia, i primi tali da dar luogo all'attrazione $-\sigma'$, e perciò rappresentabili mediante le masse $-m'$, i secondi all'attrazione σ_1.

Dalle osservazioni si è effettivamente portati a supporre che le irregolarità visibili nella distribuzione della massa terrestre siano, almeno in parte, compensate. Ma quanto è detto nel § 2 mostra che, nelle ricerche relative alla forma del Geoide, si deve dare al termine δ l'espressione (20) *indipendentemente da qualunque ipotesi sulla distribuzione della massa terrestre.*

Meccanica. — *Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

Il prof. Vito Volterra [2], trattando la teoria dei moti del polo terrestre, ha studiato, fra altro, il problema della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî. In questa Nota, con procedimento del tutto diverso e quanto mai semplice, trovo, sotto forma intrinseca ed intuitiva, le equazioni e gli integrali del problema e ne deduco con calcoli brevissimi le equazioni della polodia, le più notevoli proprietà del moto e la sua rappresentazione cinematica. Nella mia trattazione non interviene affatto il solito armamentario degli assi fissi e mobili, delle formole del Poisson ecc., generalmente adoperato nelle ordinarie trattazioni dei problemi di moto dei solidi.

1. EQUAZIONI ED INTEGRALI DEL MOTO. — Supponendo che nel corpo abbiano luogo, sotto l'azione di forze interne, dei moti tali che non ne alterino nè la forma, nè la distribuzione di densità, non varieranno per effetto di questi nè il baricentro O del corpo, nè il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse rigidamente connesso col corpo. Supponendo O fisso, sia Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione intorno ad O; $\mathbf{M}_i$ il momento, rispetto ad O, dell'impulso dovuto ai moti interni; α l'omografia d'inerzia [3] del sistema rispetto ad O; allora il momento dell'impulso totale del corpo, rispetto ad O, è rappresentato dal vettore $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$. Supponendo inoltre che il sistema sia sottratto all'azione di forze esterne, il noto *teorema dell'impulso* permette di scrivere immediatamente l'equazione del moto sotto la forma

$$\frac{d(\alpha\Omega + \mathbf{M}_i)}{dt} = 0, \tag{1}$$

da cui si deduce subito l'integrale delle aree

$$\alpha\Omega + \mathbf{M}_i = \mathbf{K}, \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 11 agosto 1917.

[2] Vito Volterra, *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre*, Astronomische Nachrichten, Bd. 138, nn. 3291-92; Atti della R. Accad. di Torino, vol. 30, a. 1895; *Sur la théorie des variations des latitudes*, Acta Mathematica, tomo XXII.

[3] Cfr. O. Lazzarino, *Interpretazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di Sofia Kowalewski* ecc., Rendiconti della R. Accad. delle Scienze di Napoli, serie 3ª, vol. XVII, a. 1911.

dove K è un vettore costante. Questa formola esprime che « *quando il sistema è sottratto all'azione di forze esterne, il momento dell'impulso totale è un vettore costante in grandezza e direzione* ».

Giova rilevare che le equazioni (1) e (2) sussistono anche nel caso più generale in cui i *moti interni non siano stazionarî*.

Sviluppando la (1) e tenendo presente che [1]

$$\frac{d(\alpha\Omega)}{dt} = \alpha\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge \alpha\Omega \tag{3}$$

si ha

$$\alpha\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge \alpha\Omega + \frac{d\mathbf{M}_i}{dt} = 0 . \tag{1_1}$$

Nel caso dei moti interni stazionarî, il vettore $\mathbf{M}_i$ ha modulo costante ed è rigidamente connesso col corpo, onde

$$\frac{d\mathbf{M}_i}{dt} = \Omega \wedge \mathbf{M}_i \tag{a}$$

e quindi la (1_1) si può scrivere

$$\alpha\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0 . \tag{$1'$}$$

In tal caso sussiste, oltre il precedente, l'*integrale delle forze vive* che si ricava subito moltiplicando scalarmente la $(1')$ per Ω. Difatti, si ha $\alpha\frac{d\Omega}{dt} \times \Omega = 0$, ossia $\frac{d\Omega}{dt} \times \alpha\Omega = 0$; ma, per la (3), anche $\frac{d(\alpha\Omega)}{dt} \times \Omega = 0$, quindi, sommando questa con la seconda precedente, integrando ed indicando con h la costante d'integrazione, si ricava

$$\Omega \times \alpha\Omega = 2h \tag{4}$$

c. d. d.

Nel caso in esame può anche dedursi, quadrando la (2), l'equazione

$$(\alpha\Omega)^2 + 2\alpha\Omega \times \mathbf{M}_i = \mathrm{K}_1 \tag{$2'$}$$

dove $\mathrm{K}_1 = \mathbf{K}^2 - \mathbf{M}^2$ è una costante.

2. Equazioni della polodia e proprietà notevoli del moto. — Riferendomi sempre, da ora in poi, al caso dei moti interni stazionarî, scrivo l'equazione dell'ellissoide centrale d'inerzia del sistema

$$(\mathrm{M} - 0) \times \alpha(\mathrm{M} - 0) = 1 . \tag{5}$$

[1] Cfr. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, tomo II, pag. 1 [Pavia, 1913].

Indicando con P il punto intersezione della retta $O\Omega$ con questo ellissoide, il luogo di P sull'ellissoide dicesi *polodia*. Si dimostra facilmente che « *per ogni posizione dell'asse istantaneo di rotazione* $O\boldsymbol{\Omega}$, *la velocità* « *angolare del sistema è proporzionale al modulo del vettore* $P - O$, « *ossia al semidiametro dell'ellissoide d'inerzia coincidente con l'asse* « *istantaneo di rotazione* ».

Difatti, poichè P è un punto dell'ellissoide centrale d'inerzia, la (5) dà

$$(5') \qquad (P - O) \times \alpha (P - O) = 1\,;$$

ponendo poi: $\bmod (P - O) = \varrho$, $\bmod \Omega = \omega$, si ha

$$(6) \qquad P - O = \frac{\varrho}{\omega}\,\Omega\,;$$

sostituendo nella (5') viene $\frac{\varrho^2}{\omega^2}\,\boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} = 1$, da cui, per la (4), si ricava

$$(7) \qquad \omega = \varrho \, . \sqrt{2h} \qquad \text{c. d. d.}$$

In base a questa proprietà *si può determinare la polodia* e quindi tutte le possibili posizioni dell'asse istantaneo di rotazione. Difatti, sostituendo nella (2') al vettore $\boldsymbol{\Omega}$ l'espressione

$$(8) \qquad \boldsymbol{\Omega} = \sqrt{2h}\,(P - O),$$

si ha

$$(9) \qquad [\alpha (P - O)]^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}\,\alpha (P - O) \times \mathbf{M}_i = \frac{K_1}{2h}\,.$$

La (5') e la (9) *sono le equazioni della polodia.*

Dalla (2) si ricava ancora, tenendo conto della (8),

$$\left(P - O + \frac{\alpha^{-1}\mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}}\right) \times \alpha^2 \left(P - O + \frac{\alpha^{-1}\mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}}\right) = \frac{\mathbf{K}^2}{2h}$$

che è un'altra forma della (9); onde si può dire che la polodia è l'intersezione dell'ellissoide d'inerzia (5') con l'ellissoide di centro O_1

$$(9') \qquad (P - O_1) \times \alpha^2 (P - O_1) = \frac{\mathbf{K}^2}{2h}$$

dove

$$(10) \qquad O_1 = O - \frac{\alpha^{-1}\mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}}\,.$$

È importante osservare che dalla (2) si possono immediatamente ricavare le equazioni parametriche della polodia. Infatti la (2) porge

$$(2'') \qquad \alpha\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{K} - \mathbf{M}_i$$

da cui si ha la relazione $\Omega = \alpha^{-1}(K - M_i)$ che fornisce l'espressione della velocità angolare Ω, e siccome dalle (6) e (7) si ha $P - O = \frac{1}{\sqrt{2h}} \Omega$, segue

$$(11) \qquad P = O + \frac{1}{\sqrt{2h}} \alpha^{-1}(K - M_i)$$

che è l'*espressione esplicita del punto generico* P *che descrive la polodia.* In questa formola figura il vettore costante K che è completamente determinato quando siano date le condizioni iniziali, le quali appunto determinano il moto del sistema; perciò, date queste, la (11) fornisce le equazioni parametriche della polodia.

È facile calcolare la velocità con cui il punto P si muove sulla polodia o sull'erpolodia. Infatti, ricordando che $P = O + \frac{\Omega}{\sqrt{2h}}$ si ha successivamente per le (1′) e (2)

$$(b) \qquad \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2h}} \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{2h}} \alpha^{-1}(\Omega \wedge K) = -\alpha^{-1}[(P - O) \wedge K]$$

che dà la velocità cercata, la quale può facilmente costruirsi ricorrendo all'ellissoide reciproco di quello d'inerzia. Si osserva che nei punti della polodia per i quali è $\Omega \wedge K = 0$ la velocità di P è nulla; tali punti, come si vedrà in una Nota successiva, sono *punti doppî* della polodia, la quale, se non è degenere, ne ammette uno solo.

Si dimostrano molto facilmente *altre notevoli proprietà del moto*: Chiamo *piano polare relativo al polo di rotazione* P, il piano tangente in P all'ellissoide centrale d'inerzia. Indico con $S - O = \alpha\Omega + M_i$ il vettore dell'impulso totale del sistema e con $H - O = M_i$ quello dovuto ai moti interni. Il vettore $S - O$ è fisso nello spazio; il punto H, essendo i moti interni stazionarî, è fisso nell'interno del corpo, onde la retta OH può chiamarsi *asse dei moti interni*.

Dalle espressioni di $S - O$ ed $H - O$ si deduce per differenza

$$(12) \qquad S - H = \alpha\Omega ;$$

ora, per la (8), la (4) può scriversi

$$(13) \qquad (P - O) \times \alpha\Omega = \sqrt{2h}$$

quindi, essendo ben noto che il vettore $\alpha(P - O)$, parallelo ad $\alpha\Omega$, è perpendicolare al piano tangente in P all'ellissoide d'inerzia, si conclude, in virtù della (12), che questo piano tangente, che è il piano polare relativo al punto P, è perpendicolare al vettore $S - H$. Sussiste dunque la proprietà

che « *il piano polare è sempre perpendicolare al vettore che congiunge* « *l'estremo* S *dell'asse della coppia dell'impulso totale del sistema con* « *l'estremo* H *dell'asse dei moti interni* ».

La distanza δ del baricentro O del sistema dal piano polare è data da

$$\delta = (P - O) \times \frac{\alpha\Omega}{\operatorname{mod} \alpha\Omega}$$

ossia, tenendo presenti le (12) e (13),

$$\delta = \frac{\sqrt{2h}}{\operatorname{mod}(S - H)} \tag{14}$$

cioè « *la distanza del baricentro del sistema dal piano polare varia in* « *ragione inversa della distanza* SH ».

3. Rappresentazione cinematica del moto. — Sia P la posizione del polo di rotazione al tempo t; se Q è un punto generico del piano polare in P, deve essere soddisfatta l'equazione $(Q - P) \times \alpha\Omega = 0$; sommando questa con la (13), si ha $(Q - O) \times \alpha\Omega = \sqrt{2h}$, ossia, per la (2''),

$$(Q - O) \times (\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) = \sqrt{2h}\,. \tag{15}$$

Questo piano polare varia al variare di t, perchè il vettore $\mathbf{M}_i$ (di modulo costante) è funzione del tempo. Per trovare la caratteristica relativa a questo piano, cioè la sua intersezione col piano corrispondente al tempo $t + dt$, basta derivare la (15) rispetto a t, come insegna la teoria generale degli inviluppi. Essendo $\mathbf{K}$ costante, risulta

$$\frac{d\mathbf{M}_i}{dt} \times (Q - O) = 0$$

ossia, per la (a),

$$\Omega \wedge \mathbf{M}_i \times (Q - O) = 0\,. \tag{16}$$

Ora, il piano rappresentato da questa equazione è evidentemente il piano POH, cioè il piano individuato dal polo P di rotazione e dall'asse $O\mathbf{M}_i$ dei moti interni. Dunque « *il piano polare ha per caratteristica la sua* « *intersezione col piano* POH ».

Interpretando questa intersezione come l'asse istantaneo intorno a cui ruota nell'istante t il piano polare, si può dire che « *in ogni istante il* « *piano polare ruota intorno alla sua intersezione col piano che contiene* « *il polo di rotazione e l'asse dei moti interni* ».

Immaginando condotte per ciascun punto della polodia le caratteristiche, cioè le rette che rappresentano gli assi istantanei di rotazione dei corrispon-

denti piani polari, il luogo di queste rette è una rigata sviluppabile che può chiamarsi *rigata assiale*; questa ha evidentemente per piani tangenti i piani polari e quindi risulta tangente all'ellissoide d'inerzia ed è ad esso invariabilmente collegata. Si ha dunque questa semplice rappresentazione cinematica:

« *Il moto del sistema si può riprodurre facendo rotolare l'ellissoide* « *centrale d'inerzia sul piano polare, mentre questo ruota intorno alla* « *sua retta di contatto con la rigata assiale* ».

Fisica. — *Sulla scoperta delle leggi delle variazioni adiabatiche dello stato gazoso.* Nota I di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA [1].

La relazione $pv^k =$ costante fra le variazioni adiabatiche della pressione e del volume dei gaz perfetti fu, per molto tempo e da molti autori, attribuita a Poisson, ma taluni l'hanno attribuita invece a Laplace.

Avogadro (Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino, tomo 33, 1829) scrivendo pochi anno dopo la pubblicazione della formula, e combattendo le obbiezioni che ad essa faceva Ivory, l'attribuisce a Poisson.

Cazin invece (Ann. de ch. et de ph., 1862) in uno studio importante sulla espansione e compressione dei gaz, chiama questa relazione e quella fra il volume e la temperatura, equazioni di Laplace e di Poisson, ritenendo quindi che nessuno dei due possa esserne considerato come l'unico autore incontrastato.

Nel trattato di Fisica di Jamin, interamente rifuso da Bouty (4ª ediz., vol. II**, pag. 50), la formula suddetta viene attribuita a Laplace, ed in nota si osserva: « Poisson, a cui taluni autori attribuiscono questa formula, non ne ha dato che una dimostrazione inesatta ». [Laplace, *Mécanique céleste*, t. V, pag. 153; Poisson, *Traité de mécanique*, t. II, pag. 64 (640 invece); Journal de l'École Polytechnique, XIV cahier].

Confidando forse in questa affermazione, anche il Roiti (*Trattato di Fisica*, 5ª ediz., vol. I, pag. 483) attribuisce la formula a Laplace, e così fanno Chappuis et Berget (*Phys. générale*, vol. I, pag. 401, 2ª edizione) e Leduc (Journ. de phys., 1916, pag. 9) mentre Waltenhofen, Chwolson, Battelli e Cardani nei loro trattati l'attribuiscono a Poisson.

Finalmente il prof. Grassi, in una Nota recente (Rend. dell'Accad. dei Lincei, marzo 1916) citando l'affermazione di Bouty, precisa l'errore a cui essa accenna, osservando che esso « consiste essenzialmente nell'aver considerato dq/dp e dq/dv come derivate parziali, mentre noi oggi sappiamo che

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1917.

non lo sono » (?) « e sappiamo ciò appunto perchè siamo venuti a conoscere il principio dell'equivalenza; e nei trattati di termodinamica si procura sempre di mettere in evidenza che, in forza di questo principio, quella quantità che si chiama la variazione di calore, il dq, non è un differenziale esatto ».

« Il Poisson non conosceva il principio di equivalenza ed ha continuato, fino alla fine della sua dimostrazione, a considerare come derivate parziali di una medesima funzione q le due espressioni suddette ».

Non si può far carico all'autore di un'opera in cinque grossi volumi, cioè al Bouty, se in essa si trova un'opinione, esposta incidentalmente e molto brevemente, che è discutibile, ma che i limiti dell'opera, pur così estesa, impediscono di discutere a fondo. Tuttavia si deve notare che la suddetta affermazione riesce un po' ambigua a chi la consideri con qualche attenzione e senza preconcetti. Non vi si accenna alla priorità e si può credere che, secondo l'ordine naturale, Poisson abbia dato prima la dimostrazione inesatta e poi Laplace quella esatta, e così parrebbe perchè la seconda opera citata del Poisson è anteriore a quella di Laplace. Ma in tal caso non pare equo che autore di una formula debba dirsi non chi primo la trova ma chi primo ne dà una dimostrazione esatta. Si può credere invece che la dimostrazione di Laplace sia anteriore ed allora pare strano che Poisson, che non poteva ignorarla, voglia dare una dimostrazione inesatta e persistervi nelle due edizioni del suo trattato di Meccanica.

Aggiungasi che Poisson ha dato due dimostrazioni del tutto diverse della sua formula, e rimane dubbio se l'una o l'altra od entrambe siano inesatte.

Ho creduto utile di consultare le Memorie originali di Laplace e di Poisson (e di qualche contemporaneo) non tanto per chiarire chi sia il vero autore della formula (ciò che può parere ozioso) quanto per vedere come Laplace potesse dare una dimostrazione esatta di una formula che deriva immediatamente dall'espressione analitica del primo principio di Termodinamica, che egli non conosceva. Ne ho ricavato parecchie notizie e dimostrazioni poco note, di lettura non facile per la diversità ed indeterminatezza di alcuni simboli, le quali mi pare opportuno di riassumere semplificandole notevolmente coll'uso delle notazioni odierne, ed anche col sostituire il volume specifico v, ora usato generalmente, alla densità ϱ usata dai suddetti autori, ciò che semplifica le formule differenziali.

Come Poisson riferisce (Ann. de ch. et de ph., maggio 1823) già Lagrange nelle sue prime ricerche sulla teoria del suono (Memorie antiche dell'Acc. delle Sc. di Torino, vol. II, pag. 153, 1760) avendo ottenuto con un calcolo rigoroso la formula di Newton sulla velocità del suono, ed avendo dimostrato che, contrariamente all'opinione di Eulero, essa non dipende dall'ampiezza delle vibrazioni, aveva osservato che si potevano mettere d'ac-

cordo i risultati della formula e quelli delle esperienze nell'aria, supponendo che la pressione p dell'aria cresca più rapidamente della sua densità ϱ, secondo la formula

$$(1) \qquad \frac{p}{\varrho^{4/3}} = \text{costante}, \quad \text{ossia} \quad pv^{4/3} = \text{costante}.$$

Egli però non potè dare nessuna ragione fisica che spiegasse questa deviazione dalla legge di Boyle $pv =$ costante.

Laplace (dove e quando non risulta) trovò la causa di questa deviazione nel fatto che l'aria per effetto delle alternative e rapidissime condensazioni e rarefazioni prodotte dal passaggio delle onde sonore, rispettivamente si riscalda e si raffredda, e quindi alla variazione di pressione prodotta dalla variazione di densità e considerata nella legge di Boyle, si aggiunge quella prodotta dalla variazione di temperatura.

Poisson, come Laplace riferisce (*Meccanica celeste*, 2ª ediz. delle opere, vol. V, pag. 109) ha sviluppato questa spiegazione in una dotta Memoria (che è inserita nel Journal de l'École Polytechnique, cahier XIV, 1808, e che non ho potuto consultare) ed ha ottenuto per la velocità del suono la formula:

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{gh}{\varrho}\left[1 + \frac{\alpha\omega}{(1+\alpha\theta)\gamma}\right]}.$$

essendo g l'accelerazione della gravità, h, ϱ, θ ed α la pressione, la densità, la temperatura ed il coefficiente di dilatazione termica dell'aria, ed ω l'aumento di temperatura che produce la piccola e rapidissima condensazione $\gamma = d\varrho/\varrho$.

Laplace (Ann. de ch. et de ph., 1816) enuncia senza dimostrare il teorema che la velocità del suono nell'aria è uguale a quella che risulta dalla formula di Newton moltiplicata per $\sqrt{c_p/c_v}$.

In seguito (Bulletin de la Soc. Philomatique, 1821, pp. 165-166, *Mécanique céleste*, vol. V, libro XII, aprile 1823), supponendo che il calore sia un fluido che formi attorno alle molecole atmosfere che siano attirate da queste ma che si respingano fra loro, egli calcola la velocità del suono e dimostra così il suddetto teorema.

Inoltre, indicando con c_p, c_v quelle quantità di calore che, a pressione costante oppure a volume costante fanno crescere rispettivamente il volume specifico o la pressione della frazione α coefficiente di dilatazione o di aumento di pressione, egli pone:

$$(3) \qquad c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \alpha v \qquad\qquad c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \alpha p$$

e, difatti, se questi ∂v e ∂p fossero rispettivamente eguali ad αv e ad αp,

ciò che corrisponderebbe per definizione al riscaldamento di 1°, si avrebbe $(\partial q)_p = c_p$, $(\partial q)_v = c_v$ [1].

Dividendo la prima per la seconda di queste uguaglianze, ed indicando con k il rapporto c_p/c_v, Laplace ottiene l'equazione a derivate parziali:

$$v\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p - kp\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v = 0 \tag{4}$$

e supponendo k costante in conformità coi risultati dell'esperienza ed integrando, ricava:

$$q = \psi(pv^k) = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,f(pv^k) \tag{5}$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie e ψ ed f due funzioni pure arbitrarie.

Nel caso di q costante Laplace (che suppone anche T costante?) ottiene l'equazione:

$$c_v\frac{dp}{p} + c_p\frac{dv}{v} = 0 \tag{6}$$

che può scriversi anche $dp/p + kdv/v = 0$.

Non è supponibile che Laplace non vedesse che dalle relazioni (5) come anche dalla (6) risulta la relazione $pv^k =$ costante, tuttavia egli non la ricava mai, sia che non volesse uscire dal suo argomento (il calcolo della velocità del suono nell'aria), sia che la ritenesse senz'altro evidente, e senza importanza.

Rispondendo ad una lettera e ad osservazioni di Plana, nel maggio 1823, egli osserva, infatti, che la sua formula serve a calcolare il calore generato dalla compressione rapida dell'aria, ma questo cenno, il solo dal quale risulti che egli s'è occupato di questo argomento, non venne reso pubblico che venti anni dopo in una Memoria dello stesso Plana.

Sebbene Laplace ed i suoi contemporanei definiscano q come la quantità di calore posseduta da un corpo, tuttavia, siccome questa non è misurabile, nelle loro formule che sono basate sull'esperienza compare ciò che è misurabile, cioè la quantità di calore che esso corpo cede o riceve nelle condizioni che si considerano.

Anche riportandosi a quei tempi ed a quelle idee, si deve considerare come una svista se essi hanno considerato questo calore come funzione dello stato del corpo. Laplace lo considera espressamente come la somma del ca-

[1] Tuttavia queste definizioni di c_p e di c_v non sono rigorose (o almeno non sono d'accordo colle definizioni solite) che a 0°; difatti poichè $pv = \mathrm{RT}$, $p(v+\delta v) = \mathrm{R(T+1)}$, $(p+\delta p)v = \mathrm{R(T+1)}$, gli aumenti di volume a pressione costante e di pressione a volume costante che produce il riscaldamento di 1° sono: $\delta v = \mathrm{R}/p = v/\mathrm{T}$, $\delta p = \mathrm{R}/v = p/\mathrm{T}$ e non come ammette Laplace αv ed αp, cioè $v/\mathrm{T_0}$ e $p/\mathrm{T_0}$.

lore apparente e del calore latente; ora il primo fa variare lo stato del corpo (p. es. v e T del mercurio dei termometri), e l'altro non lo fa variare (altrimenti sarebbe apparente e non già latente) e quindi non può essere considerato come funzione di tale stato, nè può esser considerata come funzione di tale stato la somma suddetta, cioè q.

Fisica. — *Sul secondo postulato della teoria della relatività.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

La teoria della relatività sorse basandosi su due postulati fondamentali, ben conosciuti. Il primo afferma la impossibilità di scoprire il moto di un sistema senza riferire questo ad altri sistemi; in altri termini nega la realtà fisica del *moto assoluto*. Il secondo afferma che la velocità c di propagazione della luce nel vuoto, sia una costante universale. Entrambi questi postulati sono generalizzazioni di fatti o principii, già dapprima comunemente ammessi dai fisici. Così, il primo è, in certo modo, la estensione, anche ai fenomeni ottici od elettrici, di un principio della meccanica classica, estensione giustificata dall'esito negativo di talune esperienze (Michelson e Morley, Trouton e Noble) tendenti a scoprire il moto assoluto terrestre od il *vento di etere* traversante la materia terrestre. Il secondo postulato è la generalizzazione di un principio fondamentale nella teoria delle ondulazioni eteree e nell'elettromagnetismo. Questi due principii ben accetti, separatamente, ai cultori moderni di fisica, furono tratti da capitoli di questa disciplina assai disparati; e, una volta richiamati, la loro origine fu quasi dimenticata; una costruzione ingegnosa sorse poi sul loro connubbio: la teoria della relatività. Questa, pur ripudiando, secondo Einstein ed altri, taluna delle concezioni teoriche che avevano servito di base alla formulazione del secondo postulato (l'etere), serve a spiegar bene l'insuccesso delle esperienze citate più sopra.

Ora, la nostra mente, abituata, come diceva Ritz, a « *sostanzializzare* » i fenomeni fisici, mentre afferra facilmente la essenza del primo postulato, non altrettanto fa col secondo; tanto più che, come si è detto, taluni fautori delle teorie relativistiche non ritengono necessaria la esistenza del mezzo etereo di trasmissione, per spiegare la costanza di c. Inoltre, dal secondo postulato, o da una certa parte di esso, dipendono le conclusioni che appajono artifiziose o strane di tutta la teoria relativistica [2]. Questo secondo postulato va inteso nel senso che un osservatore, misurante la velocità della luce proveniente da una sorgente luminosa, trova sempre lo stesso valore, per tale velocità, tanto che egli e la sorgente sieno in quiete *relativa* o

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1917.
(2) Carmichael, Phys. Rev., 1912, XXXV, pag. 168.

(per chi ne ammette la possibilità) *assoluta*, quanto se la sorgente o l'osservatore, od entrambi, si muovano con moto di traslazione uniforme. Per cui, in sostanza, il secondo postulato afferma la assoluta indipendenza di c da qualsiasi contingenza di moto uniforme di traslazione, che affetti sia la sorgente che l'osservatore.

È noto che un' ipotesi di carattere meccanico o balistico, secondo cui la velocità della luce si venga a sommare con quella della sorgente, potrebbe spiegare, come la teoria della relatività, l'insuccesso di quelle tali esperienze, più sopra citate. Ma essa sarebbe radicalmente in contrasto con la teoria elettromagnetica, per cui pochi sono quelli che ne intravedono la attendibilità [1] Ad ogni modo si possono immaginare delle esperienze che dovrebbero decidere fra la detta ipotesi o teoria meccanica, e la relativistica.

Si può ora vedere che taluno dei metodi, anche di solito già adottati per la verifica dell'effetto Doppler, potrebbe portare, se opportunamente modificato, alla risoluzione del detto problema. Per ciò consideriamo una sorgente luminosa S, emettente onde di lunghezza λ e di frequenza n, che si muova

$S \quad S' \quad A \quad A' \quad O \quad B \quad B'$

con la velocità v verso l'osservatore fisso O. Supponiamo dapprima che le onde si trasmettano attraverso un etere fisso. Le n onde emesse in $1''$ si troveranno distribuite nel tratto $S'A = c - v$. Nello stesso tempo arriveranno ad O tutte le onde n' entranti nel tratto $OB = c$, per cui $(c - v)/n = c/n'$, cioè $n' = nc/(c - v)$. Facendo $v/c = \beta$, e trascurando i termini di ordine superiori al primo in β, si ha $n' = n(1 + \beta)$. La nuova lunghezza d'onda si ottiene tenendo conto che $c = n\lambda = n'\lambda'$, per cui $\lambda' = \lambda(1 - \beta)$.

Facciamo, invece, l'ipotesi di carattere balistico od emissivo, enunciata più sopra. In $1''$, le onde emesse da S si troveranno distribuite nel tratto $S'A' = c$. In un tempo eguale, arriveranno su O, n' onde che verranno a distribuirsi nel tratto $OB' = c + v$. Per cui $c/n = (c + v)/n'$, cioè $n' = n(1 + \beta)$. Tenendo conto poi che $c + v = n'\lambda'$, si vede che, esattamente, $\lambda' = \lambda$.

Per cui, mentre per quanto concerne la frequenza si arriva alle stesse conclusioni (salvo i termini in β^2) tanto con l'ipotesi eterea quanto con quella balistica, per la lunghezza d'onda si avrebbero valori diversi nelle due ipotesi, e tali valori differirebbero per un termine del prim'ordine in β. L'effetto Doppler, quindi, misurato con l'osservazione della lunghezza d'onda, porte-

[1] A questo proposito va ricordato l'importante lavoro critico di Ritz (*Gesammelte Werke*, pag. 317) che forse non è stato preso in sufficiente considerazione.

rebbe a risultati differenti a seconda che l'ipotesi giusta sia l'una o l'altra delle enunciate (1).

Ora le osservazioni dell'effetto Doppler sono sinora state fatte misurando lo spostamento delle linee spettrali con prismi o con reticoli di diffrazione. Per il caso dei prismi, si può osservare che le teorie della dispersione sinora ammesse, tanto se fondate su considerazioni meccaniche (Maxwell, Sellmejer, Helmholtz), che la elettronica, lasciano supporre che quel fenomeno possa dipendere esclusivamente dalla frequenza delle vibrazioni luminose incidenti. Per cui, lo spostamento osservato delle linee spettrali, può esser dovuto alla semplice variazione di frequenza, provocata dall'effetto Doppler; e ciò tanto che si ammetta per la luce la teoria di un etere fisso, od una teoria balistica od emissiva.

Rimarrebbe quindi, da questo lato, insoluta la questione di sapere se la velocità di propagazione della luce possa o no cambiare con la velocità della sorgente. Ma l'effetto Doppler è stato constatato, oltre che con prismi, con reticoli di diffrazione, tanto per il caso di sorgenti astronomiche che terrestri (2). Il funzionamento di un reticolo, dal punto di vista geometrico, è considerato come esclusivamente dipendente dai valori delle lunghezze d'onda incidenti, venendosi così a definire le posizioni delle righe degli spettri successivi. Ora poichè, secondo la ipotesi balistica od emissiva, il valore di λ non cambia con la velocità della sorgente, ne risulta che il reticolo non dovrebbe dare risultato apprezzabile, studiando l'effetto Doppler; ma ciò non è conforme alla esperienza. Per cui le osservazioni del fenomeno Doppler nelle stelle e nei bordi del sole, con gli specchi in moto (Galitzin e Wilip), oppure nei raggi anodici (Stark, Paschen), farebbero concludere che effettivamente la velocità della luce rimanga inalterata per il moto della sorgente; il che equivarrebbe al rigetto della teoria balistica od emissiva. Di tale avviso è Tolman (3), quantunque Stewart (4) esprima parere contrario. Effettivamente si deve considerare che la comune teoria del reticolo, come anche fa notare La Rosa (5), potrebbe non esser più esatta nel caso di una qualche teoria meccanica, balistica o emissiva, della luce. Ad ogni modo è da notare che le osservazioni astronomiche dell'effetto Doppler non sempre sono accompagnate dalla conoscenza, per altra via, della velocità relativa alla terra, della sorgente. Nel caso dei bordi del sole, occorre poi andar cauti, nel porre in relazione la misura dello spostamento delle righe, con la

(1) Queste conclusioni sono le stesse di quelle già enunciate da altri autori; v. p. e., Tolman, Phys. Rev. 1910, XXI, pag. 26.

(2) Galitzin e Wilip, Communications Ac. Russe, 1907, pp. 213-223; Stark, Ann. d. Phys. 1909, *28*, pag. 974.

(3) Phys. Rev. 1912, XXXV, pag. 136.

(4) Phys. Rev. 1911, XXXII, pag. 418.

(5) Nuovo Cimento, 1912, III, pag. 356.

velocità dei bordi, desunta da quella delle macchie solari, giacchè la loro luce può essere fortemente rifratta dalle masse gassose incandescenti periferiche, ed in conseguenza di ciò, il valore dell'effetto Doppler può notevolmente mutare (¹). Quanto alle osservazioni terrestri, quelle fatte da Stark e da altri sui raggi anodici, oltre a portare ad una misura assai incerta del fenomeno (si osservano delle code sfumate più o meno lunghe, indicanti particelle luminose con diversi gradi di velocità). non consentono di prevedere per altra via, nel caso dell'esperienza. quale sia la precisa volocità delle singole particelle luminose; e quelle fatte con specchi in moto, non riguardano effettivamente sorgente in moto, il che può non aver lo stesso effetto (²).

Da tutto ciò si deduce che non si abbia sinora una prova assolutamente sicura delle immutabilità di c, col vario moto della sorgente; ciò ben inteso non volendo senz'altro appoggiarsi o alla classica teoria elettromagnetica, sia pure adattata, con le idee di Lorentz, al caso dei corpi in moto; sia ancora alla teoria della relatività pura e semplice. Questo modo di vedere rimane confermato dalla lettura dei lavori di taluno tra quelli che più sostengono la teoria della relatività, e quindi, implicitamente, il secondo postulato; in essi si trova spesso enunciato il desiderio che ulteriori fatti sperimentali sorgano a confermare la bontà della detta teoria, od a contradirla definitivamente; e tale desiderio è in certo modo in relazione con la crisi à cui, negli ultimi anni, la detta teoria è andata incontro.

Ma d'altra parte, come nota il prof. Levi-Civita, dopo le ultime ricerche di Einstein, che raccolgono in una sintesi mirabilmente comprensiva, tutti i fenomeni fisici (gravitazione compresa), è difficile sottrarsi all'impressione di trovarsi di fronte a qualche cosa di definitivamente acquisito, per quanto riguarda la relatività. Tutto sommato non sarebbe però da disprezzarsi un tentativo di definitiva conferma dal punto di vista sperimentale, di idee che tanto hanno impressionato il mondo fisico, negli ultimi tempi; e questa conferma potrebbe anche scaturire dallo studio della velocità con cui si propaga la luce da una sorgente mobile. o, in altri termini, del valore di λ.

Per tradurre in atto tale tentativo e sempre prescindendo da idee preconcette, l'ideale sarebbe di poter verificare la struttura dell'onda luminosa, sottratta a qualsiasi azione esterna, nel suo libero propagarsi nel vuoto, essendo la sorgente capace di muoversi variamente. Anche prescindendo dal fatto che si deve sempre sperimentare sotto l'azione della nostra terra, due altre gravi difficoltà si oppongono all'attuazione di un simile programma. Anzitutto non è facile porre artificialmente in rapido moto una sorgente

(¹) Michelson, Astrophys. Journ. 1901, *13*, pag. 192; Harnack, Ann. d. Phys. 1915, *46*, pag. 558.

(²) V. teoria proposta da Ritz, *Gesammelte Werke*, pp. 321, 371, 444.

luminosa, tanto più poi se questa (come è necessario per taluni metodi interferenziali), debba essere rigorosamente monocromatica; peraltro in questo senso darò in seguito notizia di una mia disposizione in corso di attuazione pratica. In secondo luogo, la luce emessa da una sorgente in moto, per poter esser esaminata nella sua struttura (p. e. mediante un qualsiasi apparato interferenziale), deve subire rifrazioni, riflessioni ecc., talvolta numerose. Per cui non è detto che se anche c nel vuoto sia mutevole per effetto del moto della sorgente, non riacquisti un valore fisso in conseguenza dei detti fenomeni di rifrazione, riflessione ecc. Occorrerà quindi cercare di eliminare, in una esperienza del genere, il maggior numero di cause di complicazione del fenomeno, e discutere poi con avvedutezza il risultato.

Intanto per cominciare da un'esperienza relativamente più semplice, si può intraprendere lo studio delle lunghezze d'onda di un raggio di luce riflesso da uno specchio mobile. Questo può corrispondere all'altro già realizzato anni or sono da Belopolski, e poi da Galitizin e Wilip. Ma mentre il primo si serviva di prismi per l'osservazione dell'effetto Doppler, e quindi rimaneva indecisa la questione della variazione di λ; gli altri due adoperavano un reticolo di diffrazione, pel quale apparecchio sussiste la controversia più sopra accennata. Meglio sarebbe dunque esaminare con un metodo interferenziale, più semplice di quello da cui in fondo dipende il funzionamento del reticolo di diffrazione, il raggio riflesso da uno specchio mobile; di ciò dirò in una prossima Nota.

Fisica. — *Sul doppio strato elettrico al contatto del mercurio con liquidi organici debolmente conduttori* [1]. Nota II dei proff. V. Polara ed A. Maresca, presentata dal Socio Riccò [2].

È noto che il doppio strato elettrico al contatto mercurio-elettrolita subisce variazioni di densità per polarizzazione fisica, e precisamente, polarizzando con forza elettromotrice progressivamente crescente da 0 ad 1 Volta, quando il piccolo elettrodo a (fig. 2) sia catodo, il Lippmann ha dedotto teoricamente ed il Pellat [3] ed il Konig [4] han provato sperimentalmente che la densità del doppio strato elettrico va progressivamente diminuendo, si annulla per una f. e. m. di 0,97 Volta circa e cambia successivamente di segno.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania, diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

[2] Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1917.

[3] Pellat, *Cours d'électricité*, tome III, pag. 149.

[4] A. Konig, Wied. Ann., 16, 1882, pag. 1.

Avendo constatato precedentemente [1] l'esistenza di un doppio strato elettrico al contatto del mercurio con alcuni liquidi organici debolmente conduttori, ci è parso interessante ricercare se la legge di Lippmann è ancora valevole in simili casi.

Siamo perciò ricorsi al metodo potenziametrico del Bouty, schematicamente rappresentato dalla fig. 2.

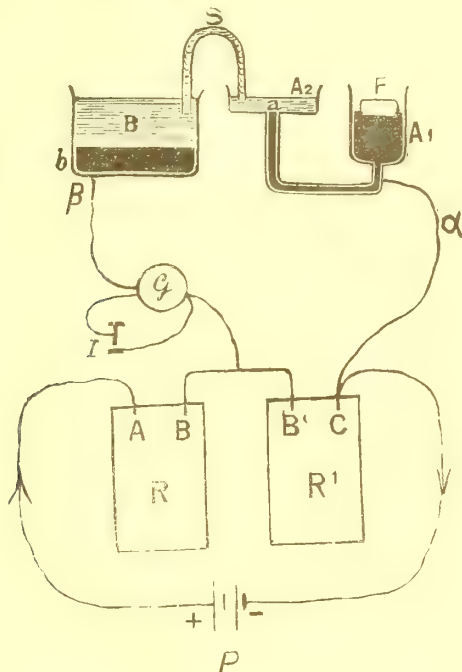



Fig. 2.

Nel circuito delle due Pile Daniel P sono inserite due cassette di resistenza identiche R ed R': nella prima R sono inizialmente levate tutte le spine (con che viene intercalata una resistenza di 11110 Ohm), mentre nell'altra R', per mezzo delle spine, si esclude tutta la resistenza. Ai due serrafili B' e C della cassetta R' viene staccata la derivazione $B' G \beta S a \alpha$ comprendente il galvanometro balistico G e l'apparecchio in vetro descritto nella Nota I, essendo l'elettrodo α in comunicazione col serrafilo C a cui fa capo il polo negativo delle pile P. Un tasto I permette di escludere dal circuito il galvanometro nel primo periodo della polarizzazione, e di inserirlo invece poco prima di far variare, appena l'ago ha raggiunto la sua nuova posizione d'equilibrio, la superficie del mercurio.

[1] Polara e Maresca, R. Acc. Lincei, questi Rendiconti, Nota I, pag. 91.

Inserendo nella cassetta R′ una resistenza via via crescente ed eliminando caso per caso altrettanta resistenza nella cassetta R, in guisa che la resistenza totale del circuito PABB′CP non venga mai alterata, si può derivare nel circuito $B'\beta\alpha C$ una differenza di potenziale progressivamente crescente.

Ecco il risultato, sempre concorde, delle varie osservazioni fatte con l'alcool etilico, la glicerina e la benzina resa conduttrice con alcool.

Alcool etilico.

		Lettura al cannocchiale prima di far variare la superficie del mercurio in a.	Lettura al cannocchiale all'atto in cui l'elettrodo a varia di estensione e relativa alla massima deviazione.	Differenza fra le due letture.
Senza pile		0	9 rossi	9 verso i rossi
Resistenza inserita nella cassetta potenziometrica R′	100 ohm	0	7 »	7 » »
»	500 »	7 neri	2 neri	5 » »
»	1000 »	17 »	16 »	1 » »
»	2000 »	40 »	39 + »	1 — » »
»	2200 »	40 »	—	verso i neri
»	2500 »	47 »	—	»

Glicerina.

Senza pile		0	15 rossi	15 verso i rossi
Resistenza inserita nella cassetta potenziometrica R′	100 ohm	1 neri	12 »	13 » »
»	500 »	3 »	9 »	12 » »
»	1000 »	6 »	3 »	9 » »
»	2000 »	12 »	6 neri	6 » »
»	3000 »	19 »	17 »	2 » »
»	4000 »	24 »	$23\frac{1}{2}$ »	$\frac{1}{2}$ » »
»	4800 »	30 »	$29\frac{1}{2}$ »	$\frac{1}{2}$ » »
»	5000 »	33 »	—	verso i neri
»	6000 »	—	—	» »

Benzina 30. — Alcool 10.

Senza pile		0	2 rossi	2 verso i rossi
Resistenza inserita nella cassetta potenziometrica R′	200 ohm	0	1 + »	1 + » »
»	500 »	1 neri	0	1 » »
»	2000 »	1 »	$\frac{1}{2}$ — neri	$\frac{1}{2}$ + » »
»	4000 »	11 »	$10\frac{1}{2}$ »	$\frac{1}{2}$ » »
»	5000 »	13 »	13 — »	accenno » »
»	6000 »	14 »	—	verso i neri

I precedenti risultati dimostrano che con il progressivo aumentare della differenza di potenziale derivata nel circuito dell'apparecchio diminuisce, fino ad annullarsi, la deviazione al galvanometro, diminuisce cioè, fino ad annullarsi, la quantità di elettricità $q = X . \Delta S$ che attraversa il circuito

$\beta G \alpha$ quando si fa variare la superficie dell'elettrodo di mercurio a: diminuisce corrispondentemente e finisce per annullarsi la densità X del doppio strato elettrico.

Non può la diminuzione progressiva della deviazione del galvanometro verso i numeri rossi della scala attribuirsi alla crescente resistenza (da 0 a 5000 ohm nel caso della glicerina) intercalata nel circuito di scarica, come potrebbe a prima vista sembrare, giacchè la resistenza del liquido è d'un ordine di grandezza tale che al suo confronto può ritenersi trascurabile quella successivamente intercalata nella cassetta R': nel caso della glicerina la deviazione si conserva di 15 divisioni verso i rossi qualunque sia la resistenza intercalata (0 o 10000 ohm) nel circuito di scarica, quando si fa variare l'estensione del mercurio in a.

Il metodo però, nelle condizioni sperimentali indicate, se permette di osservare la progressiva diminuzione della densità del doppio strato, non consente di mettere nettamente in evidenza l'*inversione* del doppio strato stesso, giacchè, per resistenze non molto piccole intercalate nella cassetta R', il galvanometro, dopo aver deviato dalla parte dei numeri rossi mentre si fa variare la superficie del mercurio in a, rivela, quando il mercurio ha già invaso il fondo della vaschetta A_2, una deviazione in senso opposto, assumendo una deviazione *permanente* verso i numeri neri che cresce con la resistenza intercalata nella cassetta R'.

Segue quindi che quando i due impulsi sono di senso contrario è facile discernerli, mentre essi si fondono in unico impulso quando sono di senso concordante.

La tendenza del galvanometro a deviare permanentemente dalla parte dei numeri neri della scala, dopo avvenuta la variazione di superficie del mercurio in a, pare sia l'effetto di diminuita resistenza nel circuito per la sostituzione nella vaschetta A_2 d'uno strato di mercurio ad uno strato corrispondente di liquido: e non crediamo sia facile cómpito eliminarla anche adoperando un apparecchio costruito con maggiore precisione di dettaglio di quel che non sia stato possibile a noi, senza l'ausilio di lavoratore del vetro e di tecnico nel laboratorio. Col ritorno delle condizioni normali tenteremo comunque di raggiungere lo scopo.

Quanto alla precisa misura del voltaggio occorrente per neutralizzare il doppio strato elettrico, non crediamo il metodo possa fornirla, giacchè l'osservazione d'un accenno di deviazione verso i numeri rossi seguìto da una notevole deviazione verso i neri, non può essere un dato costante e certo per misure di precisione: ma del graduale decremento della deviazione verso i numeri rossi della scala con l'aumentare della f. e. m. che determina la polarizzazione fisica il metodo pare sia indice chiaro.

Un'osservazione che merita considerazione è stata fatta nel corso della ricerca. Lasciando aperto il tasto per qualche tempo, l'equipaggio del gal-

vanometro, specialmente se nella cassetta R′ è intercalata notovole resistenza, dopo aver raggiunto una posizione d'equilibrio corrispondente all'intensità costante che attraversa il circuito derivato, tende molto lentamente verso lo zero a causa, verosimilmente, d'una polarizzazione *chimica* degli elettrodi di mercurio. Se, quando l'ago è molto prossimo allo zero, si prova a far variare la superficie del mercurio in a, non si osserva deviazione alcuna verso i numeri rossi o se ne osserva una molto meno rilevante di quella notata precedentemente nelle stesse condizioni potenziometriche.

Così, nel caso della glicerina, si ha:

Resistenza inserita nella cassetta potenziometrica R′	Deviazione osservata quando varia la superficie	
	senza polarizzazione chimica	con polarizzazione chimica
4000 Ohm	1 verso i rossi	0
2000 »	6 »	1 verso i rossi

Ciò concorda con quanto accade negli elettroliti e trova rispondenza nel fatto che nella deduzione teorica della formula di Lippmann [1] occorre, perchè il fenomeno di polarizzazione possa essere considerato come reversibile, poter trascurare il passaggio di ioni attraverso la superficie di contatto (passaggio che determina la polarizzazione chimica) e tener conto solo del primo effetto della polarizzazione (polarizzazione fisica) che è quello di far variare la densità del doppio strato.

Facciamo infine notare che avendo ripetuto dopo varî giorni l'esperimento con la stessa glicerina precedentemente usata (che avevamo perciò tolto dal contatto col mercurio e conservata, non avendone altra a disposizione), il fenomeno si è presentato, nell'insieme, con le medesime modalità, salvo che la resistenza alla cassetta potenziometrica R′ necessaria per annullare la deviazione del galvanometro verso i numeri rossi della scala, si è trovata alquanto minore.

Ecco una delle varie misure eseguite:

		Lettura al cannocchiale prima di far variare la superficie del mercurio in a.	Lettura al cannocchiale all'atto in cui l'elettrodo a varia di estensione e relativa alla massima deviazione.	Differenza fra le due letture
Senza pile		0	12 rossi	12 verso i rossi
Resistenza inserita nella cassetta potenziometrica R′	100 Ohm	0	10 »	10 » »
»	500 »	3 neri	1 »	4 » »
»	1000 »	5 »	2 neri	3 » »
»	2000 »	12 »	11 + »	1 + » »
»	3000 »	19 »	—	verso i neri
»	4000 »	26 »	—	» »

(1) Pellat, *Cours d'électricité*, tome III, pp. 147 e 144.

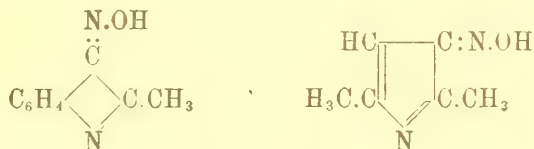
Il doppio strato, che si neutralizzava nelle esperienze precedenti con la glicerina per la resistenza di 5000 Ohm inserita nella cassetta potenziometrica R', si neutralizza ora per la resistenza di 3000 Ohm [1].

È da ritenere che il maneggio, il tempo di esposizione all'aria, il passaggio della corrente e forse anche il contatto prolungato con il mercurio, abbiano modificato la glicerina, a tale modificazione potendosi ascrivere la diminuzione della polarizzazione fisica occorrente per neutralizzare il doppio strato.

Vogliamo infine accennare che adoperando un reostato di Pouillet a filo di platino anzichè il metodo del Bouty, abbiamo trovato risultati sensibilmente concordanti con i precedenti.

Chimica. — *Azione dei nitriti alcoolici sul pirrolo* [2]. Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli [3].

In seguito a ricerche del prof. Angeli [4] e scolari, già da alcuni anni è stato dimostrato che gli indoli e i pirroli, per azione dei nitriti alcoolici, in presenza di etilato sodico, forniscono i sali di isonitrosocomposti, come p. es. i seguenti:

$$C_6H_4\langle C(:N.OH) \rangle C.CH_3 \ (\text{anello con } N) \qquad , \qquad HC—C:N.OH,\ H_3C.C \ C.CH_3 \ (\text{anello con } N)$$

Alcuni di tali isonitrosocomposti, allo stato libero, sono stabili, così quelli derivati dagli indoli e dai fenilpirroli; altri si alterano facilmente, così quelli derivati dal pirrolo e dai pirroli alchilati. Per il caso del pirrolo fu osservato, che l'alterazione dà origine a una sostanza di un bel colore nero. Poichè in questo Istituto da qualche tempo si vanno studiando [5] i composti co-

(1) Sostituendo all'apparecchio in vetro una pila Raoult, la cui f. e. m. è stata determinata con il potenziometro Carpentier, si è trovato che la neutralizzazione del doppio strato ha luogo all'incirca: per l'alcool con 0,6 Volta di f. e. m., per la glicerina adoperata inizialmente con 1, 2 Volta, con la glicerina adoperata nella seconda serie di esperienze con 0,8 Volta, con la benzina ed alcool con 1, 2 Volta.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di studî superiori in Firenze.

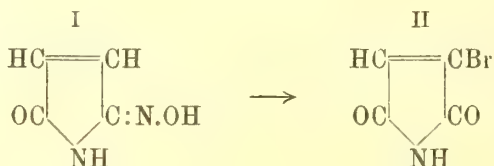
(3) Pervenuta all'Accademia il 26 agosto 1917.

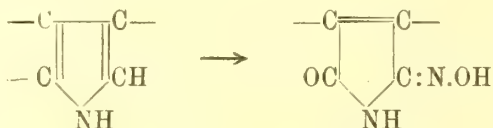
(4) Memorie Lincei (1911), pag. 437.

(5) Questi Rendiconti (1915), vol. XXIV, sem. 2°, pag. 3; (1916), vol. XXV, sem. 1°, pag. 761.

lorati che in varie reazioni si formano dal pirrolo, a causa delle sorprendenti analogie da alcuni presentate con le *melanine*, così il prof. Angeli ed io [1] abbiamo sottoposto a un esame preliminare anche quella sostanza nera, si è determinato ch'essa conserva circa la composizione centesimale di un nitrosopirrolo e l'abbiamo denominata *nero di nitrosopirrolo*.

Per aprire la via allo studio di quest'ultimo era utile stabilire sin da principio se esso derivi da un α- o da un β-nitrosopirrolo. Riguardo a ciò ho potuto raccogliere alcuni fatti, studiando un prodotto che si forma insieme con il *nero*, facendo agire sul pirrolo, sciolto in alcool e in presenza d'etilato sodico, la quantità equimolecolare di nitrito etilico. Il nuovo prodotto corrisponde alla formola grezza $C_6H_8N_2O_2$ e si saponifica facilmente in alcool etilico e in un composto $C_4H_4N_2O_2$. Questo dà sali decomponibili con acido carbonico; riscaldato con acidi minerali diluiti elimina tosto idrossilammina; è instabile al permanganato; ossidato con acqua di bromo fornisce imide monobromomaleica (II) e acido fumarico. Tali risultati si spiegano attribuendo al composto $C_4H_4N_2O_2$ la struttura di monossima dell'imide maleica (I)

```
        I                            II
   HC═════CH                    HC═════CBr
   |       |        ⟶           |       |
   OC      C:N.OH               OC      CO
     \   /                        \   /
      NH                           NH
```

Com'è noto, le ricerche sull'emopirrolo [2] hanno stabilito che alcuni omologhi del pirrolo vengono ossidati dall'acido nitroso appunto nelle monossime di omologhi dell'imide maleica

```
  —C═════C—                 —C═════C—
   ‖      ‖      ⟶           |      |
  —C      CH                 OC      C:N.OH
    \   /                      \   /
     NH                         NH
```

È da notare che ciò è stato ottenuto in soluzione acida e con eccesso di acido nitroso, quindi in condizioni ben differenti da quelle sopraricordate, in cui il pirrolo si trasforma, con buon rendimento, nel derivato maleinico. Ora, poichè per mezzo dei nitriti alchilici, in presenza d'etilato di sodio, gli omologhi del pirrolo forniscono isonitroso-derivati, è presumibile che il pirrolo stesso, in un primo momento, assuma un gruppo nitrosilico, dando

[1] Questi Rendiconti (1917), vol, XXVI, sem. 1°, pag. 273.

[2] Piloty, Liebig's Ann. (1909), *366*, pag. 254; Willstaetter e Asahina, Berichte d. Deuts. Ch. Ges., *44*, 3707.

l'α-nitrosopirrolo e che questo, poi, si trasformi nell'ossima dell'imide maleica. Se l'α-nitrosopirrolo origini anche il *nero*, o se questo derivi dal β-nitrosopirrolo, ancora non risulta nettamente da questa prima ricerca. Con essa ho stabilito che l'acido nitroso attacca preferibilmente la posizione α del nucleo pirrolico o, in altre parole, che il residuo nitrosilico si comporta per tale riguardo, come il formilico, l'acetilico, l'acido carbonico, i composti organo-magnesiaci, i sali di diazonio, ecc. Posso aggiungere, tuttavia, di avere notato che quanto maggiore è il rendimento in ossima dell'imide maleica, tanto minore è quello del nero, e ciò potrebbe anche significare che i due composti traggano la loro origine dal medesimo nitrosopirrolo.

Azione del nitrito etilico sul pirrolo in presenza d'etilato sodico.

A una soluzione in cc. 150 d'alcool a 98 °/₀ di gr. 3,43 (1 at.) di sodio e cc. 10 (1 mol.) di pirrolo, raffreddata verso 5°, si aggiungono in varie porzioni cc. 12,4 (1 mol.) di nitrito d'etile, e si lascia il tutto per circa quattro giorni alla temperatura di 10°. Trascorso questo tempo si aggiunge un poco d'etere e si raccoglie e spreme alla pompa il voluminoso precipitato formatosi, che si presenta in aghi giallo-arancio. Ancora di questo prodotto si ottiene concentrando le madri. Esso è costituido da un miscuglio dei sali sodici di varî composti, principalmente dell'etere etilico dell'ossima dell'imide maleica e di un nitrosopirrolo. Per separare questi composti si fa la soluzione acquosa del miscuglio, si agita con etere per asportare qualche traccia di pirrolo, indi si satura con anidride carbonica. La soluzione imbrunisce, perchè il nitrosopirrolo, che si libera dal sale, si trasforma tosto nel *nero* corrispondente, il quale rimane allo stato colloidale. Senza attendere che esso si deponga, perchè nel frattempo si decomporrebbe l'etere dell'ossima dell'imide maleica, si procede senz'altro a ricavare quest'ultimo, estraendo più volte la soluzione acquosa con etere solforico. Poi si lascia la soluzione acquosa in riposo per qualche giorno e quando il *nero* (ch'è quello descritto nella Nota citata) si è deposto, si raccoglie su filtro. Infine si acidificano con acido acetico le acque madri e allora precipita un'altra specie di *nero*, che sarà a suo tempo studiata.

L'*etere etilico dell'ossima dell'imide maleica*, separato, come si è detto, dagli altri prodotti, si purifica mediante cristallizzazioni dall'etere solforico e trattamento con carbone animale. Così si ottiene in aghi incolori o leggermente bruni. Fonde non troppo nettamente verso 100° e si decompone, formando un liquido bruno, qualche grado al di sopra. Tenuto su acido solforico, nel vuoto, raggiunge il peso costante con grande lentezza. L'analisi dette °/₀ C 50,88; H 5,85; N 20.5; per $C_6H_8N_2O_2$ si calcola C 51,3; H 5,7; N 20,0.

La sostanza è molto solubile nell'alcool freddo; si scioglie discretamente nell'acqua tiepida e ne ricristallizza in lunghissimi aghi; se però si lascia in soluzione a freddo per qualche tempo, essa si saponifica. La saponificazione avviene assai celermente per azione degli acidi minerali diluiti e freddi; e, più lentamente, anche per mezzo dell'ammoniaca. Tuttavia dalle soluzioni ammoniacali dell'etere, recenti, se ne può precipitare il sale d'argento, composto in fiocchi giallastri, che con il riscaldamento si decompone esplosivamente. All'analisi fornì °/₀ Ag 43,92; calcolato per $C_6H_7N_2O_3$ Ag 43,64.

Ossima dell'imide maleica. — Si ottiene particolarmente bene, per saponificazione a freddo e con acidi diluiti, del sopradescritto suo etere etilico. Si purifica mediante ripetute cristallizzazioni dall'acqua, in presenza di nero animale e in tal modo, generalmente, si ottiene in lunghi cristalli aghiformi appena colorati in giallo. Si può avere anche in bellissimi cristalli d'un bianco splendente, p. es. mediante cristallizzazione da una soluzione d'acqua ossigenata, o per azione degli acidi sul corrispondente etere ben purificato. Essa è poco solubile nell'etere solforico, assai solubile nell'alcool freddo e nell'acqua bollente. Riscaldata rapidamente in un tubicino, dopo 195° principia ad alterarsi e a 205° fonde in un liquido nero, sviluppando gas. Essiccata a 110° dette all'analisi C °/₀ 42,78; H 3,79; N 25,0; calcolato per $C_4H_4N_2O_2$ C °/₀ 42,81; H 3.60; N 25,0.

L'ossima dell'imide maleica fornisce un *sale monosodico*, che si ottiene mescolando, a caldo, le soluzioni alcooliche di una mol. di essa e di un at. del metallo e si depone dall'alcool bollente, in cui non è molto solubile, in bei cristalli di color giallo e splendenti. Questi riscaldati a 100° sfioriscono, perdendo assai di peso, e a temperatura più alta si decompongono esplosivamente. Sulla sostanza seccata a 100° si è trovato Na °/₀ 16,87; calcolato per $C_4H_3N_2O_2Na$ 17,16.

Il sale sodico, riscaldato in soluzione alcoolica con la quantità equimolecolare di ioduro di etile, fornisce un derivato isomero con l'etere etilico dell'ossima dell'imide maleica, il quale cristallizza in lunghi aghi leggermente colorati in giallo, fonde a 55-60° e non mostra d'alterarsi sino a circa 150°; non si saponifica nelle stesse condizioni dell'etere sopradetto. All'analisi dette il 20,5 °/₀ di N; calcolato per $C_6H_8N_2O_2$ 20,0.

L'ossima dell'imide maleica, riscaldata con acidi minerali diluiti, elimina idrossilammina e ammoniaca, ciò che dà indizio dell'esistenza dei gruppi isonitroso e imidico. Si scioglie negli idrati e nei carbonati alcalini con colorazione gialla; dalla soluzione in questi ultimi si estrae con etere. Forma sali di rame d'aspetto simile a quello dei sali degli acidi idrossammici.

Non resiste alla prova di Baeyer; viene ossidata profondamente da una soluzione al 2 °/₀ di permanganato: invece resiste alla soluzione al 30 °/₀

di acqua ossigenata. Dall'ossidazione con acqua di bromo ho avuto risultati che hanno messo in luce la costituzione del composto.

Gr. 15 di esso si sciolgono in cc. 200 di acqua e alla soluzione fredda si aggiungono a goccia a goccia e agitando, cc. 1,8 di bromo (5 at. circa). La soluzione, dopo una mezza giornata, è totalmente scolorata; allora si concentra a bagno-maria sino a che principia a formarsi un precipitato. Si fa raffreddare e si filtra. Il precipitato raccolto si scioglie in un poco di acqua e si estrae con etere la soluzione: in questa rimane del bromuro ammonico; nell'etere passa una sostanza bianca, di reazione acida, la quale, purificata per cristallizzazione da acqua, si riconosce come acido fumarico: difatti non resiste alla prova di Baeyer, sublima e riscaldata in tubicino chiuso fonde oltre 280°.

La soluzione primitiva d'onde si è separato il precipitato sopradetto, si estrae con etere, il quale asporta dell'acido ossalico e una sostanza che, cristallizzata più volte dall'acqua, fonde verso 150°. Contiene bromo; riscaldata con alcali libera ammoniaca; sublima in aghetti incolori. Tali caratteri la fanno riconoscere per l'imide monobromo-maleica; difatti, il confronto con un campione di tale sostanza, preparata da l'imide succinica e bromo, riesce positivo.

Patologia. — *Sulle proprietà dei sieri di animali iperimmunizzati contro la morva e sulla scelta degli animali per la preparazione di sieri ricchi in anticorpi antimorvosi* [1]. Nota del Ten. Col. dott. E. Bertetti e del Magg. prof. G. Finzi (Direttori), pres. dal Socio B. Grassi [2].

Quantunque diversi tentativi di preparazione di sieri antimorvosi siano stati fatti in questi ultimi anni, nessun ricercatore ha tentato di ottenere l'iperimmunizzazione sistematica, comparativa di soggetti più o meno recettivi o refrattarii all'infezione morvosa sia mediante bacilli virulentissimi associati o no a prodotti tossici dei bacilli morvosi stessi.

La preparazione di sieri ricchi di anticorpi antimorvosi fu da noi tentata sull'*asino*, animale eminentemente recettivo alla morva in cui l'infezione naturale e sperimentale assume di solito andamento acuto; sul *mulo*, dove l'infezione morvosa assume generalmente un decorso subacuto (per quanto relativamente frequenti siano in questo animale i casi di morva a

(1) Lavoro eseguito nel « laboratorio di ricerche sulla morva », Intendenza 3ª Armata.
(2) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1917.

decorso acuto e non rari quelli a decorso cronico); sul *cavallo* nel quale generalmente l'infezione morvosa è a decorso cronico e sul *bue* naturalmente refrattario all'infezione morvosa per una forma di immunità naturale *assoluta*, derivante da una particolare attitudine difensiva dell'organismo verso il *bacillus mallei* ed i veleni da esso prodotti. E su questa immunità naturale, *assoluta* dei bovini di fronte all'infezione morvosa noi insistiamo, d'accordo con la maggioranza dei ricercatori, malgrado le recenti constatazioni di Riegler e Ciuca (Archiva Veterinara 1915) e Meloni (Clinica veterinaria 1912).

* * *

Noi vogliamo senz'altro esporre il piano delle nostre esperienze:

Immunizzazione con bacilli uccisi con sostanze chimiche.

Il 30 agosto 1916 un cavallo (n. 75) riceve in vena una mezza cultura in agar, di 7-8 giorni, di bacilli morvosi uccisi con una conveniente soluzione di bicloruro di mercurio. Le iniezioni vengono in seguito fatte con dosi crescenti di bacilli fino ad inoculare, alla 12ª iniezione, cinque culture in agar di bacilli sempre modificati con lo stesso procedimento. Le prime iniezioni sono ravvicinate e in seguito vengono regolarmente fatte ogni cinque giorni fino a tutto gennaio 1917 ed ogni 12-13 giorni dal gennaio a tutt'oggi.

Le iniezioni vengono in generale bene tollerate; gli sbalzi termini non sono eccessivi, le reazioni locali, ben manifeste, persistono per 5-8 giorni, le reazioni generali si risolvono in due o tre giorni.

Immunizzazione con bacilli uccisi col calore.

Il 28 agosto 1916 un cavallo (n. 49), un mulo (n. 74) ed un asino (n. 73) vengono trattati come il cavallo n. 75 salvo però essere immunizzati con bacilli morvosi uccisi col calore.

Le iniezioni vengono anche in questi soggetti abbastanza bene tollerate per quanto i fenomeni generali siano più manifesti che non nel caso precedente. Violente reazioni dovute ad uno stato di speciale ipersensibilità ci costringono a ricorrere presto ad iniezioni sottocutanee che frequentemente sottintendono infiltrati dolorosi e talora ascessi asettici.

Con questi il 27 settembre viene trattato un cavallo (n. 5) con culture in brodo di cinque-sei giorni di età uccise col calore. Il trattamento è iniziato con 5 c.c. di cultura per via endovenosa e già alla 9ª iniezione si

iniettano 30 c.c. di cultura. Però siamo ancora costretti di abbandonare la via sanguigna per ricorrere ad iniezioni sottocutanee che sono fatte regolarmente ogni 5 giorni a tutto il gennaio 1917 ed ogni 12-13 giorni dal gennaio a tutt'oggi.

Immunizzazione con bacilli uccisi col calore e con tossina malleinica.

Al 29 luglio 1916 due cavalli (n. 48) (n. 50) ed un asino (n. 70) vengono trattati con bacilli uccisi col calore e con tossina-malleinica da noi preparata con speciale procedimento.

Il cavallo n. 48 e l'asino (n. 70) ricevono in vena i bacilli uccisi provenienti da culture in agar. Il cavallo n. 50 culture in brodo pure uccise col calore più tossino-malleina alla dose da 3 c.c. a 15 c.c.

Immunizzazione di bovini con bacilli uccisi col calore e con bacilli virulenti.

Il giorno 3 dicembre 1916 si inizia l'immunizzazione per via sottocutanea di due bovini: *bianco* e *rosso*. Il primo viene iniettato con bacilli virulentissimi coltivati su agar; il secondo con culture dello stesso ceppo coltivate in agar uccise col calore (1-6 abbondanti patine). Le iniezioni vengono regolarmente fatte ogni cinque giorni da 8 mesi circa ed i bovini sopportano benissimo il trattamento immunizzante. La reazione locale e generale conseguente alle iniezioni di bacilli virulenti è di media intensità. Talune volte nel bue *bianco* in corrispondenza al punto di iniezione, vediamo formarsi un ascesso dal quale facilmente si isola il bacillo della morva.

* * *

Ebbene oggi i nostri soggetti in trattamento forniscono in generale un siero dotato di qualità specifiche veramente interessanti:

Proprietà *precipitanti* molto energiche di fronte alle diverse malleine brute diluite in soluzione fisiologica ed ai filtrati di culture di morva.

Se si mescolano 5-10 volumi di siero con un volume di soluzione di malleina bruta diluita ad un quinto, un decimo in acqua distillata o soluzione fisiologica e si portano i miscugli alla temperatura di 37°, dopo 15 minuti si nota evidentissima la precipitazione e conseguente sedimentazione dei numerosissimi e grossi fiocchi prima in sospensione. Dalle nostre esperienze risultò evidentissimo che un eccesso di *precipitogeno* (malleine, filtrati) limita e impedisce la formazione del precipitato.

I sieri da noi ottenuti si dimostrano ancora dotati di proprietà *agglutinanti* notevolmente manifeste e a diluizioni considerevolissime (1 : 10000 — 1 : 20000). La prova del riscaldamento ci convinse della natura *specifica* delle agglutinine dei nostri sieri (agglutinine da immunizzazione).

Così pure contengono in abbondanza una *sensibilizzatrice* specifica facilmente rilevabile sia di fronte al *bacillus mallei*, sia di fronte ai diversi estratti bacillari.

Abbiamo detto più sopra che « *i nostri soggetti in trattamento forniscono in generale*......... » ; infatti non tutti gli animali in trattamento fornirono un siero egualmente attivo. Quelli inoculati con culture in brodo o con culture in agar del *b. mallei* e malleina diedero sieri per nulla affatto attivi. Di più gli animali trattati con bacilli coltivati su agar non diedero tutti, indipendentemente dal procedimento di inattivazione impiegato, un siero ugualmente attivo. Se noi dovessimo infatti classificare con numeri da uno al dieci, l'attività *precipitante*, *agglutinante e sensibilizzante* dei sieri da noi ottenuti, dovremmo classificare con 10 il siero datoci dai bovini, con 8 il siero datoci dai cavalli, con 4 quello del mulo, con 1-2 quello dell'asino. E la capacità di fissare l'alessina, di precipitare i veleni malleinici e di agglutinare i diversi ceppi del b. mallei è perfettamente proporzionale per ogni siero.

CONCLUDENDO DUNQUE:

1) È possibile ottenere sui diversi animali (bue, cavallo, mulo, asino) sieri antimorvosi dotati di energiche proprietà precipitanti di fronte alle diverse malleine ed ai filtrati di culture morvose, di alto potere agglutinante e contenenti sensibilizzatrici specifiche facilmente rilevabili sia se fatti agire di fronte a bacilli morvosi, sia di fronte ai diversi estratti bacillari.

2) L'esistenza di una maggior o minore disposizione individuale alla infezione morvosa influisce in modo inversamente proporzionale nella produzione di anticorpi antimorvosi. Infatti questi anticorpi, che traducono il lavoro che l'organismo ha svolto nell'immunizzazione, sono più abbondanti nel siero di bue per diminuire progressivamente nel cavallo, mulo e asino.

3) Lo stato di refrattarietà dei bovini di fronte al bacillo della morva non deve, secondo noi, considerarsi in rapporto ad una mancanza di affinità fra il *bacillus mallei* e gli elementi cellulari dell'organismo giacchè questi, per le nostre esperienze, restano indubbiamente ed attivamente impressionati dal *b. mallei*.

4) È controindicato trattare animali con culture in brodo o con culture in agar di virus morvoso più malleina allo scopo di avere sieri *com-*

pleti giacchè i prodotti solubili del *bacillus mallei* contenuti in sospensione nelle culture in brodo o le malleine brute iniettate essendo solo forse lentamente modificate o finiscono per neutralizzare in vivo gli anticorpi provocati dai corpi microbici iniettati, oppure il gruppo aptoforo del precipitogeno assorbe e lega la precipitina.

5) Le precipitine contenute nei nostri sieri antimorvosi sono termolabili.

Le temperature fra 55-60° distruggono il gruppo funzionale, precipitoforo, attivo delle nostre precipitine che vengono trasformate in precipitoidi.

Mettiamo volentieri a disposizione dei ricercatori i nostri sieri antimorvosi.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 5°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXV. (1892-1917). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 5.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile*.

Pubblicazione bimensile. N. 6.

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 6°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sul teorema generale di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. In diverse Note pubblicate nei volumi XXIV, XXV e XXVI di questi Rendiconti (1915, 16, 17), occupandomi dei sistemi tripli di superficie ortogonali, e più in generale dei sistemi n^{pli} ortogonali dello spazio S_n euclideo, o a curvatura costante, ho più volte accennato che per le trasformazioni di Ribaucour di siffatti sistemi (trasformazioni per inviluppi di sfere o di ipersfere) sussiste un teorema generale di *permutabilità*. Questo è affatto analogo al teorema di permutabilità per le trasformazioni *asintotiche* delle superficie, o trasformazioni per congruenze W [2]; ed anzi nel caso $n=2$ delle trasformazioni di Ribaucour per le superficie l'indicato teorema segue dall'altro per le congruenze W applicando la trasformazione (di contatto) di S. Lie, che cangia le rette in sfere e le linee asintotiche in linee di curvatura [3].

Nella presente comunicazione stabilisco le formole effettive per il generale teorema di permutabilità delle trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali che si enuncia:

Se ad un sistema n^{plo} ortogonale $(\sum)$ sono contigui, per trasformazioni di Ribaucour, due altri sistemi $(\sum')$, $(\sum'')$, esiste una intera serie ∞^1

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1917.

[2] Cfr. *Lezioni*, vol. II, §§ 247, 248.

[3] L'osservazione è già contenuta in una mia Nota sulle trasformazioni D_m di Darboux (questi Rendiconti, fascicolo del 24 aprile 1904).

di sistemi $(\bar{\sum})$, *contenente* $(\sum)$, *e deducibile con quadrature, tale che ogni sistema* $(\bar{\sum})$ *è contiguo, per trasformazioni di Ribaucour, ai due fissi* $(\sum')$, $(\sum'')$.

Colle consuete notazioni [1], definiamo il sistema n^{plo} ortogonale $(\sum)$ dello spazio S_n euclideo mediante la forma che assume il corrispondente ds^2 dello spazio:

$$ds^2 = \sum_i^{1\dots n} H_i^2 \, du_i^2 , \tag{1}$$

dove i coefficienti H_i e le relative rotazioni

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \qquad (i \neq k)$$

soddisfano al sistema differenziale caratteristico:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad , \quad \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \quad (i \neq k \neq l) \\ \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} = 0 \ \text{[2]}. \end{cases}$$

Per le n ccordinate cartesiane ortogonali del punto $P \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ adottiamo qui la notazione

$$x, y, z, \dots, t,$$

e corrispondentemente denotiamo con

$$X_i, Y_i, Z_i, \dots, T_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

i coseni di direzione dello spigolo i^{mo} dell'n^{edro} principale. Sussistono allora le formole fondamentali

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u_i} = H_i X_i \quad , \quad \dfrac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda , \end{cases}$$

colle analoghe per gli assi coordinati O_y, O_z, ...

2. Sia ora $(\sum')$ un nuovo sistema n^{plo} ortogonale dedotto da $(\sum)$ con una trasformazione di Ribaucour. e scriviamo le formole di trasformazione sotto la forma data ai nn. 2, 3 della Nota ora citata, dove però ora tro-

[1] Cfr. particolarmente la Nota del 19 marzo 1916 (vol. XXV dei Rendiconti).

[2] Ricordo che la notazione $\sum_\lambda^{(i,k)}$ significa che all'indice λ di sommazione si dànno tutti i valori $1, 2, 3, \dots, n$ *eccetto i due fissi* i, k.

viamo opportuno cangiare i segni delle quantità H'_i, X'_i negli opposti. La trasformazione dipende dalle $2n+2$ *funzioni trasformatrici*

$$\gamma_i, H'_i, \varphi, \psi,$$

che debbono soddisfare al sistema differenziale seguente:

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k \quad , \quad \frac{\partial\gamma_i}{\partial u_i} = (H_i - H'_i)\psi - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = H_i\gamma_i \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial u_i} = -\frac{\gamma_i H'_i}{\varphi}\psi \\ &\frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \left\{\beta_{ki} + (H'_i - H_i)\frac{\gamma_k}{\varphi}\right\} \cdot H'_k \end{aligned}\right.$$

ed alla relativa equazione in termini finiti

$$(B^*)\qquad \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = 2\psi\varphi.$$

Per altro la trasformazione è già pienamente determinata dalle $n+1$ funzioni trasformatrici *essenziali*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi$$

assoggettate a soddisfare alla parte delle (B) date da

$$(b)\qquad \frac{\partial\gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = H_i\gamma_i;$$

la ψ si calcola dopo ciò dalla (B^*) e le altre delle (B) dànno i valori delle H'_i.

Per il sistema trasformato $(\sum')$, i cui elementi indichiamo con accenti, abbiamo le formole:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= x - \frac{2\varphi}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2} \cdot \sum \gamma_\lambda X_\lambda \\ X'_i &= X_i - \frac{2\gamma_i}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2} \cdot \sum \gamma_\lambda X_\lambda. \end{aligned}\right.$$

I due sistemi $(\sum), (\sum')$ si trovano in relazione perfettamente simmetrica, ed importa calcolare le funzioni trasformatrici

$$\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n; \varphi'$$

pel passaggio inverso da $(\sum')$ a $(\sum)$. Dovendo valere ancora le (3) permutando i due sistemi, abbiamo le proporzioni

$$\gamma'_1 : \gamma'_2 : \dots : \gamma'_n : \varphi' = \gamma_1 : \gamma_2 : \dots : \gamma_n : \varphi,$$

e possiamo porre

$$\gamma'_i = \mu\gamma_i \quad , \quad \varphi' = \mu\varphi ,$$

dove si tratterà di calcolare il fattore μ di proporzionalità. Le condizioni

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial u_i} = \mathrm{H}'_i\,\gamma'_i$$

dànno subito

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial u_i} = \frac{\mathrm{H}'_i - \mathrm{H}_i}{\varphi}\,\gamma_i , \tag{4}$$

ed in effetto risulta dalle (B) che l'espressione

$$\sum_\lambda \frac{\mathrm{H}'_\lambda - \mathrm{H}_\lambda}{\varphi}\,\gamma_\lambda\, du_\lambda$$

è un differenziale esatto. Così dalle (4) si ha μ (a meno di un fattore costante naturalmente indeterminato) con una quadratura e per le funzioni trasformatrici nel passaggio da $(\sum')$ a $(\sum)$ le formole

$$\gamma'_i = \mu\gamma_i \quad , \quad \varphi' = \mu\varphi , \tag{5}$$

alle quali si può anche aggiungere per la $(\mathrm{B}^\star)$ l'altra

$$\psi' = \mu\psi .$$

3. Venendo ora al teorema di permutabilità, supponiamo che da $(\sum)$ siasi dedotto un secondo sistema $(\sum'')$ con una trasformazione di Ribaucour, le cui funzioni trasformatrici indicheremo, per non moltiplicare le notazioni, con

$$\gamma'_i\,,\ \varphi'\,,\ \mathrm{H}''_i\,,\ \psi' ,$$

avvertendo dunque che qui $\gamma'_i, \varphi', \psi'$ non hanno più il significato delle formole (5). Per queste funzioni trasformatrici sussisteranno le formole analoghe alle (B), $(\mathrm{B}^\star)$:

$$(\mathrm{B}_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\gamma'_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma'_k \quad , \quad \frac{\partial\gamma'_i}{\partial u_i} = (\mathrm{H}_i - \mathrm{H}''_i)\,\psi' - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma'_\lambda \\ &\frac{\partial\varphi'}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i\,\gamma'_i \quad , \quad \frac{\partial\psi'}{\partial u_i} = -\frac{\gamma'_i\,\mathrm{H}''_i}{\varphi'}\,\psi' \\ &\frac{\partial \mathrm{H}''_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} + (\mathrm{H}''_i - \mathrm{H}_i)\,\frac{\gamma'_k}{\varphi'} \right\} \cdot \mathrm{H}''_k \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_1^\star)\quad \sum_\lambda \gamma'^2_\lambda = 2\varphi'\psi' ,$$

e per gli elementi di $(\sum'')$, che indichiamo con doppio accento, le formole del tipo (3)

$$
(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= x - \frac{2\varphi'}{\sum_\lambda \gamma_\lambda'^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda \\ X_i'' &= X_i - \frac{2\gamma_i'}{\sum_\lambda \gamma_\lambda'^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda . \end{aligned} \right.
$$

Cominciamo dal dimostrare che si può determinare, con quadrature, una serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\sum})$ derivati per trasformazione di Ribaucour *dal sistema* $(\sum')$ con funzioni trasformatrici (essenziali), che indicheremo con $\overline{\gamma}_i, \overline{\varphi}$, della speciale forma seguente:

$$
(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{\gamma}_i &= \Omega \gamma_i + a \gamma_i' \\ \overline{\varphi} &= \Omega \varphi + a \varphi' , \end{aligned} \right.
$$

dove a indica una costante ed Ω una funzione delle $u_1, u_2, \dots, u_n$ da determinarsi in guisa che le $\overline{\gamma}_i, \overline{\varphi}$ soddisfino alle relative equazioni caratteristiche (b)

$$
(b') \qquad \frac{\partial \overline{\gamma}_i}{\partial u_k} = \beta'_{ik} \overline{\gamma}_k \quad , \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u_i} = H_i' \overline{\gamma}_i ,
$$

le β'_{ik} essendo le rotazioni del sistema $(\sum')$, che dalle ultime (B) si calcolano in

$$
\beta'_{ik} = \beta_{ik} + (H_k' - H_k) \frac{\gamma_i}{\varphi} .
$$

Introducendo per le $\overline{\gamma}_i, \overline{\varphi}$ i valori (7) ed osservando le (B), (B_1), troviamo quali condizioni *necessarie e sufficienti* cui deve soddisfare Ω le n seguenti

$$
\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \frac{H_i' - H_i}{\varphi} \gamma_i \Omega + a \frac{H_i' - H_i}{\varphi} \gamma_i' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)
$$

a cui per le (4) possiamo dare la forma

$$
(8) \qquad \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\Omega}{\mu}\right) = a \frac{H_i' - H_i}{\varphi\mu} \gamma_i' .
$$

Ora si constata subito, mediante le formole (A), (B) e le (4), che l'espressione

$$
\sum_\lambda \frac{H_\lambda' - H_\lambda}{\varphi\mu} \gamma_\lambda' \, du_\lambda
$$

è un differenziale esatto, onde ponendo

$$(9) \qquad \Phi = \mu \int \sum_\lambda \frac{H'_\lambda - H_\lambda}{\varphi \mu} \gamma'_\lambda \, du_\lambda ,$$

avremo dalle (8)

$$\Omega = c\mu + a\Phi ,$$

con c costante arbitraria. Le formole (7) dànno quindi

$$(10) \qquad \begin{cases} \overline{\gamma}_i = c\mu\gamma_i + a(\Phi\gamma_i + \gamma'_i) \\ \overline{\varphi} = c\mu\varphi + a(\Phi\varphi + \varphi') , \end{cases}$$

e viceversa con questi valori per le $\overline{\gamma}_i$, $\overline{\varphi}$, qualunque siano le costanti a, c, si soddisfano le equazioni (b'), onde resta definita, come si voleva, una serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\sum})$, tutti trasformati di Ribaucour del sistema $(\sum')$. Il parametro che definisce il sistema $(\overline{\sum})$ nella serie ∞^1 è il rapporto $\frac{a}{c}$, e in particolare pel valore zero di questo parametro il sistema $(\overline{\sum})$ viene a coincidere, a causa delle formole inverse (5), col sistema iniziale $(\sum)$, il quale è legato non soltanto a $(\sum')$, ma anche a $(\sum'')$ da una trasformazione di Ribaucour.

Ora andiamo a dimostrare il teorema di permutabilità provando che lo stesso accade di qualunque altro sistema $(\overline{\sum})$ nella nostra serie ∞^1. Per questo prendiamo le formole che dànno, secondo le (3), in termini finiti il sistema $(\overline{\sum})$ i cui elementi indichiamo con un soprasegno; avremo

$$(11) \qquad \begin{cases} \overline{x} = x' - \dfrac{2\overline{\varphi}}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda X'_\lambda \\[2ex] \overline{X}_i = X'_i - \dfrac{2\overline{\gamma}_i}{\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X'_\lambda . \end{cases}$$

Sarà provato che questo sistema generico $(\overline{\sum})$ è legato (oltre che a $(\sum')$) a $(\sum'')$ da una trasformazione di Ribaucour se, paragonando le (11) colle (6) che definiscono $(\sum'')$, dimostriamo che per gli n assi coordinati $O_x, O_y, \ldots$ sussistono formole del tipo

$$(12) \qquad \overline{x} - x'' = R_i(X''_i - \overline{X}_i) \quad , \quad \overline{y} - y'' = R_i(Y''_i - \overline{Y}_i) , \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

dove $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sono n convenienti moltiplicatori, il cui significato geometrico sarà poi quello dei raggi delle n ipersfere che toccano in punti corrispondenti le ipersuperficie dei due sistemi $(\overline{\sum})$, $(\sum'')$.

4. Dimostriamo le (12) e troviamo gli effettivi valori dei raggi R_i col procedimento seguente. Si moltiplichino ordinatamente le n formole (12) per $X_k, Y_k, \dots$ (essendo k un indice qualunque differente od eguale ad i) e si sommi. Indicando col simbolo S queste somme rispetto agli n assi coordinati, deduciamo così dalle (12) il sistema *perfettamente equivalente* [1]:

$$(12^*) \qquad \tfrac{1}{2}S(\bar{x} - x'')\,X_k = R_i \cdot \tfrac{1}{2}S(X_i'' - \bar{X}_i)\,X_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Calcoliamo queste espressioni osservando che dalle (11), paragonate colle (3) e (6), abbiamo:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} - x'' &= -\frac{2\varphi}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + \frac{2\varphi'}{\sum_j \gamma_j'^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda - \frac{2\bar{\varphi}}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda X_\lambda' \\ X_i'' - \bar{X}_i &= \frac{2\gamma_i}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - \frac{2\gamma_i'}{\sum_j \gamma_j'^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda + \frac{2\bar{\gamma}_i}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda X_\lambda', \end{aligned}\right.$$

e sussistono d'altronde, per le formole dei nn. precedenti, le identità

$$SX_iX_k = \varepsilon_{ik} \ [2] \quad , \quad SX_i'X_k = \varepsilon_{ik} - \frac{2\gamma_i\gamma_k}{\sum_j \gamma_j^2},$$

$$\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda \gamma_\lambda = \Omega \sum_j \gamma_j^2 + a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda',$$

dalle quali seguono le altre

$$SX_k \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda = \gamma_k \quad , \quad SX_k \sum_\lambda \gamma_\lambda' X_\lambda = \gamma_k',$$

$$SX_k \sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda X_\lambda' = a\gamma_k' - \Omega\gamma_k - \frac{2\gamma_k}{\sum_j \gamma_j^2}\, a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda'.$$

Se calcoliamo con queste formole i valori dei primi e secondi membri nelle (12*), troviamo delle espressioni lineari omogenee in γ_k, γ_k', che scriviamo

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}S(\bar{x} - x'')\,X_k &= A\gamma_k + B\gamma_k' \\ \tfrac{1}{2}S(X_i'' - \bar{X}_i)\,X_k &= C\gamma_k + D\gamma_k', \end{aligned}\right.$$

i coefficienti A, B, C, D avendo i valori seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{\bar{\varphi}}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}\left(\Omega + \frac{2a}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda'\right) - \frac{\varphi}{\sum_j \gamma_j^2} \quad , \quad B = \frac{\varphi'}{\sum_j \gamma_j'^2} - \frac{a\bar{\varphi}}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda'^2} \\ C &= \frac{\gamma_i}{\sum_j \gamma_j^2} - \frac{\bar{\gamma}_i}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2}\left(\Omega + \frac{2a}{\sum_j \gamma_j^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma_\lambda'\right) \quad , \quad D = \frac{a\bar{\gamma}_i}{\sum_\lambda \bar{\gamma}_\lambda^2} - \frac{\gamma_i'}{\sum_j \gamma_j'^2}. \end{aligned}\right.$$

[1] Il determinante $|X_k, Y_k, \dots, T_k|$ dei coseni è infatto diverso da zero $(=1)$.

[2] Attribuiamo ad ε_{ik} il consueto significato: $\varepsilon_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k. \end{cases}$

Siccome abbiamo

$$\overline{\varphi} = a\varphi' + \Omega\varphi \quad , \quad \overline{\gamma}_i = a\gamma'_i + \Omega\gamma_i ,$$

indi

$$\sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2 = a^2 \sum_j \gamma_j'^2 + 2a\Omega \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda + \Omega^2 \sum_j \gamma_j^2 ,$$

le espressioni di A , B , C , D si trasformano subito nelle seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
A &= a \frac{\varphi'(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda) - a\varphi \sum_j \gamma_j'^2}{\sum_j \gamma_j^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \\
B &= \Omega \frac{\varphi'(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda) - a\varphi \sum_j \gamma_j'^2}{\sum_j \gamma_j'^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \\
C &= a \frac{a\gamma_i \sum_j \gamma_j'^2 - \gamma'_i(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda)}{\sum_j \gamma_j^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} \\
D &= \Omega \frac{a\gamma_i \sum_j \gamma_j'^2 - \gamma'_i(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda)}{\sum_j \gamma_j'^2 \cdot \sum_\lambda \overline{\gamma}_\lambda^2} .
\end{aligned}\right.$$

Ne segue che sussiste la proporzione

$$A : B = C : D ,$$

onde nella (13) il rapporto

$$\frac{S(\overline{x} - x'') X_k}{S(X''_i - \overline{X}_i) X_k} = \frac{A\gamma_k + B\gamma'_k}{C\gamma_k + D\gamma'_k}$$

è indipendente dall'indice k $\left(\text{dal rapporto } \frac{\gamma_k}{\gamma'_k}\right)$ ed eguale ad $\frac{A}{C}$. Valgono dunque in effetto le (12*), ove si prenda

$$(14) \qquad R_i = \frac{A}{C} = \frac{\varphi'(\Omega \sum_j \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda) - a\varphi \sum_j \gamma_j'^2}{a\gamma_i \sum_j \gamma_j'^2 - \gamma'_i(\Omega \sum \gamma_j^2 + 2a \sum_\lambda \gamma_\lambda \gamma'_\lambda)} ,$$

ed il teorema di permutabilità enunciato al n. 1 resta così stabilito.

5. Ora possiamo completare le proprietà geometriche inerenti al teorema di permutabilità partendo dall'osservazione che le $\overline{\gamma}_i$, $\overline{\varphi}$ date dalle formole (10) si compongono linearmente ed omogeneamente con due loro sistemi particolari di valori, per la qual cosa si dirà che la serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\sum})$ forma un *fascio*.

Prendiamo allora i due sistemi (Σ'), (Σ'') prima derivati da (Σ) e consideriamo (con evidente notazione) il fascio $c_1(\Sigma')+c_2(\Sigma'')$ da essi determinato, cioè la serie ∞^1 di sistemi trasformati di (Σ) mediante le funzioni trasformatrici

$$c_1\gamma_i+c_2\gamma'_i \quad , \quad c_1\varphi+c_2\varphi' ,$$

essendo c_1, c_2 due costanti arbitrarie, e il loro rapporto $\frac{c_1}{c_2}$ il parametro essenziale nel fascio.

Dette $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ le coordinate del punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mobile nel sistema generico del fascio, avremo per le (3) le formole

$$(15) \qquad \xi = x - 2\,\frac{c_1\varphi+c_2\varphi'}{c_1^2\sum_j \gamma_j^2+2c_1c_2\sum_j\gamma_j\gamma'_j+c_2^2\sum_j\gamma_j'^2}\cdot \\ \cdot\left(c_1\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda+c_2\sum_\lambda\gamma'_\lambda X_\lambda\right).$$

È evidente che il fascio $c_1(\Sigma')+c_2(\Sigma'')$ resta lo stesso sostituendo a (Σ'), (Σ'') due qualunque altri sistemi del fascio, e così in particolare se, tenendo fisso (Σ'), sostituiamo a (Σ'') un altro sistema del fascio. Ma si è visto sopra che un qualunque sistema $(\bar{\Sigma})$ dell'altro fascio è legato a (Σ'') da una trasformazione di Ribaucour, e lo stesso vale quindi facendo variare (Σ'') nel fascio. I due fasci sono manifestamente in relazione reciproca, onde nel teorema di permutabilità così completato: *si hanno due fasci di sistemi* n^{pli} *ortogonali tali che due sistemi presi ad arbitrio l'uno nel primo l'altro nel secondo fascio sono fra loro legati da una trasformazione di Ribaucour* (¹).

È anche interessante osservare che: *il luogo dei punti corrispondenti nei sistemi di uno stesso fascio è un circolo.* Questo risulta dalle formole (15), ove, restando fisse $u_1, u_2, \ldots, u_n$, i secondi membri sono funzioni razionali quadratiche del parametro $\frac{c_1}{c_2}$, ed il punto $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ descrive un circolo.

6. Il teorema generale di permutabilità, così completato, ammette numerose applicazioni a casi particolari: per $n=2$ alle trasformazioni di Ribaucour delle superficie, per $n=3$ a quelle dei sistemi tripli ortogonali, ecc.

Ma vi ha un'altra circostanza molto notevole, che qui accenniamo soltanto riserbandone lo sviluppo a più ampio lavoro, e che si presenta per interessanti classi di enti geometrici, fra i quali citeremo: per le superficie

(¹) Per il caso delle congruenze W queste conseguenze del teorema di permutabilità vennero sviluppate dal Tortorici nella sua tesi di laurea pubblicata nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

quelle a curvatura totale (o media) costante, e le generali superficie isoterme, pei sistemi tripli ortogonali nell' S_3 i sistemi di Weingarten, nello spazio S_n i sistemi n^{pli} ortogonali (E) (caratterizzati dalla simmetria delle rotazioni $\beta_{ik} = \beta_{ki}$), i sistemi ortogonali di Guichard-Darboux con

$$H_1^2 + H_2^2 + \cdots + H_n^2 = \text{cost.}$$

Per tutti questi sistemi, e innumerevoli altri, accade dunque che le trasformazioni di Ribaucour possono dirigersi in modo che appartenendo il sistema $(\sum)$ (la superficie) alla classe considerata, anche i due contigui $(\sum')$, $(\sum'')$ siano della medesima classe. Ed allora, nei casi in vista, si presenta costantemente questo fatto che nella serie ∞^1 di sistemi $(\overline{\sum})$ trasformati ve ne ha *oltre* $(\sum)$, *uno ed uno soltanto* appartenente alla classe considerata. Questo particolare sistema $(\overline{\sum})$, come isolato, si ottiene quindi *in termini finiti*.

In tutti questi casi, come per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, il teorema di permutabilità perfeziona quindi i metodi di trasformazione, permettendo di dedurre sempre nuovi sistemi della classe *senza alcun calcolo d'integrazione*. È questo un risultato che appare importante tanto geometricamente, quanto dal punto di vista analitico come proprietà delle soluzioni dei corrispondenti sistemi di equazioni a derivate parziali.

Meccanica. — *Assi permanenti nel moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco anche per la parte bibliografica, ho trovato che, per la rotazione di un corpo sottratto all'azione di forze esterne e nel quale sussistono dei moti interni tali che non ne alterino nè la forma nè la distribuzione di densità, l'equazione del moto può scriversi sotto la forma molto semplice

$$\frac{d(\alpha\Omega + M_i)}{dt} = 0 \tag{1}$$

da cui si ricava immediatamente l'*integrale delle aree* sotto la forma notevole

$$\alpha\Omega + M_i = K \tag{2}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1917.

[2] O. Lazzarino, *Rappresentazione cinematica del moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionarî*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, 2° sem., fasc. 5.

dove K è un vettore costante [1] completamente determinato quando sian date le condizioni iniziali del moto; Ω è il vettore rappresentativo della velocità istantanea di rotazione intorno al baricentro O del corpo; $\mathbf{M}_i$ il momento, rispetto ad O, dell'impulso dovuto ai moti interni; α l'omografia d'inerzia del sistema sempre rispetto ad O. Ho pure dimostrato che, nel caso dei moti interni stazionarî, sviluppando la (1) si ha

$$(1') \qquad \alpha \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0$$

e che, oltre il precedente, sussiste anche l'*integrale delle forze vive*

$$(3) \qquad \Omega \times \alpha\Omega = 2h.$$

In questa Nota mi son proposto di cercare, sempre per via intrinseca e nel caso dei moti interni stazionarî, gli assi permanenti di rotazione e di studiare dettagliatamente qualche caso particolare, ed ho ottenuto, in modo molto rapido e semplice, oltre le notevoli proprietà stabilite dal Volterra [2], altre proprietà non prive d'interesse.

1. Cono degli assi permanenti. — Tenendo presente la (3) si comprende che per avere un asse permanente di rotazione è necessario che sia costante il vettore Ω, ossia $d\Omega/dt = 0$; allora dalla (1'), tenendo presente la (2), si ricava

$$(4) \qquad \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad (4') \quad \Omega \wedge \mathbf{K} = 0.$$

Reciprocamente, se la (4) è soddisfatta, si deduce $d\Omega/dt = 0$. Si può dunque concludere che « *la retta* $O\Omega$ *è asse permanente di rotazione quando e solo quando coincide con la retta* OK *che è fissa nello spazio e parallela al vettore* $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$ *dell'impulso totale del sistema* ». Ora la retta OK e quindi l'asse permanente di rotazione varia al variare delle condizioni iniziali del moto, ma è facile trovare il luogo di tutti questi assi. Infatti, moltiplicando scalarmente la (4) per $\mathbf{M}_i$, si ha $\Omega \wedge \alpha\Omega \times \mathbf{M}_i = 0$, onde si conclude che gli assi permanenti corrispondenti alle diverse condizioni iniziali, appartengono al cono quadrico

$$(5) \qquad (P - O) \wedge \alpha(P - O) \times \mathbf{M}_i = 0.$$

Per trovare la grandezza ω della velocità angolare corrispondente ad un asse permanente di rotazione, indico con $\mathbf{u}$ un vettore unitario parallelo all'asse stesso e quindi al vettore costante K; allora, per la (4), ω deve soddisfare alla relazione $\omega\mathbf{u} \wedge (\omega\alpha\mathbf{u} + \mathbf{M}_i) = 0$, ossia, eliminando un fattore

[1] L'espressione « vettore costante » equivale a « vettore le cui coordinate sono costanti rispetto ad assi fissi, nella comune accezione meccanica dell'appellativo fisso ».

[2] Ved. loc. cit. nella Nota precedente.

e sviluppando, $\omega \mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{M}_i = 0$ da cui, indicando con **a** un vettore arbitrario, però non complanare con **u** ed $\alpha\mathbf{u}$, si ricava

$$\omega = \frac{\mathbf{M}_i \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{a}}{\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{a}}. \tag{6}$$

Nel caso in cui l'asse $O\mathbf{M}_i$ dei moti interni coincida con un asse permanente di rotazione, si ha $\mathbf{M}_i \wedge \mathbf{u} = 0$ e quindi, per la (6), anche $\omega = 0$.

2. Relazione fra gli assi permanenti di rotazione ed i punti multipli della polodia — È bene premettere che la polodia, essendo l'intersezione di due quadriche [1], è una quartica gobba di 1ª specie e non può quindi avere, a meno che si spezzi, che un solo punto multiplo necessariamente doppio, poichè, se ne avesse due, allora, come è ben noto e si vede subito, la quartica si spezzerebbe in due coniche passanti naturalmente per questi punti doppî. Ciò premesso, osservo che un punto doppio della polodia si ha evidentemente quando risultano tangenti fra loro le due quadriche la cui intersezione forma la polodia stessa, cioè i due ellissoidi (v. loc. cit.) ad assi paralleli

$$(7)\quad (P - O) \times \alpha (P - O) = 1 \qquad (8)\quad (P - O_1) \times \alpha^2 (P - O_1) = \frac{K^2}{2h},$$

dove

$$O_1 = O - \frac{\alpha^{-1}\mathbf{M}_i}{\sqrt{2h}} \tag{9}$$

e la tangenza ha luogo quando le normali in P a queste due quadriche coincidono. Ora le normali in P agli ellissoidi (7) e (8) hanno rispettivamente le direzioni dei vettori $\alpha(P - O)$ e $\alpha^2(P - O_1)$, perciò, applicando l'omografia α^{-1}, dovranno essere paralleli fra loro i vettori $P - O$ ed $\alpha(P - O_1)$. Ma, per la (9), $\alpha(P - O_1) = \alpha(P - O) + \mathbf{M}_i/\sqrt{2h}$; quindi, tenendo anche presente che

$$\Omega = \sqrt{2h}\,(P - O) \qquad \text{(v. loc. cit.)}, \tag{10}$$

si può dire che dovranno essere paralleli fra loro i vettori Ω ed $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$, che cioè deve essere $\Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}_i) = 0$.

Questa condizione coincide con la (4) che caratterizza le rotazioni permanenti, quindi si ha che « *la congiungente del baricentro del sistema con un punto doppio della polodia è un asse permanente di rotazione* ».

È importante osservare che ha luogo la proprietà inversa. Infatti, se la detta condizione sussiste, i vettori Ω ed $\alpha\Omega + \mathbf{M}_i$ sono paralleli, perciò lo sono pure i vettori $P - O$ ed $\alpha(P - O_1)$ e quindi anche i vettori

[1] Ved. loc. cit.

$\alpha(P - O)$ ed $\alpha^2(P - O_1)$, onde gli ellissoidi (7) e (8) sono tangenti in P e quindi P è un punto doppio della polodia.

Siccome poi, come si è visto nel n. 1, l'asse permanente deve coincidere colla retta OK, si può dire che « *i punti doppî della polodia cadono nei due punti intersezione dell'ellissoide d'inerzia con la retta fissa* OK ». Se la polodia non si spezza, allora, come si è già osservato, uno solo di questi punti è doppio ed è il punto di contatto degli ellissoidi (7) ed (8). È inoltre interessante rilevare che l'equazione (1'), che caratterizza il moto, è anche soddisfatta sostituendo contemporaneamente ad $\Omega(t)$ il vettore $-\Omega(T + t)$ ed al vettore $\mathbf{M}_i$ il suo opposto $-\mathbf{M}_i$. Ciò significa che « *i* « *moti interni del sistema sono invertibili, purchè si inverta l'asse dei moti interni* ».

Supponendo che la polodia abbia un punto doppio P_0, se dopo il tempo T da che è incominciato il moto il polo giungesse in P_0, allora, invertendo il moto, il polo dovrebbe tornare al punto di partenza dopo il tempo T; ma, essendo P_0 un punto doppio, l'asse e la velocità corrispondenti sono permanenti, quindi il polo non potrebbe più muoversi da P_0. Si ha dunque che « *se la polodia ha un punto doppio, il polo di rotazione si avvicinerà ad esso indefinitamente senza raggiungerlo mai* ». Da quanto si è detto nella Nota precedente (loc. cit.) si può anche dedurre che « *se la polodia ha un punto doppio, il polo di rotazione si avvicinerà ad esso con velocità che tende a zero* ».

Si ha dunque una differenza essenziale tra i moti che hanno luogo quando la polodia ha punti doppî e quando non ne ha: « *nei primi il polo di rotazione non tornerà al punto di partenza ma tenderà asintoticamente verso il punto doppio; nei secondi, invece, il polo tornerà al punto di partenza* ».

3. Assi permanenti e polodia in alcuni casi particolari. — Supponendo $\mathbf{M}_i = 0$ (caso di Eulero) la (4) porge subito la relazione $\Omega \wedge \alpha\Omega = 0$ la quale mostra che Ω deve essere *direzione unita* per la dilatazione α e viceversa. Quindi si ha che « *l'asse* $O\Omega$ *è asse permanente di rotazione quando e solo quando coincide con uno degli assi principali d'inerzia* ».

Suppongo ora che l'*ellissoide d'inerzia si riduca ad una sfera*, allora l'omografia α si riduce ad una *omotetia vettoriale*, cioè ad un numero A che deve essere positivo e le (7), (8) e (9) diventano rispettivamente:

$$(7')\quad (P - O)^2 = \frac{1}{A}\,; \qquad (8')\quad (P - O_1)^2 = \frac{K^2}{2h \,.\, A^2}\,; \qquad (9')\quad O_1 = O - \frac{\mathbf{M}_i}{A\sqrt{2h}}.$$

Poichè le (7') e (8') sono sfere e la congiungente dei loro centri coincide coll'asse $O\mathbf{M}_i$, come si vede dalla (9'), si trae che « *la polodia è, in tal caso, una circonferenza il cui centro giace sull'asse dei moti interni ed il cui piano è normale a questo asse, onde si ha che il cono mobile*

degli assi istantanei di rotazione è un cono di rotazione di asse OM_i ». Questi risultati ed altri ancora si possono trovare per altra via. Osservo, per questo, che le equazioni (1'), (2), (3) diventano, nel caso in esame,

$$(1_1') \quad A\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \wedge M_i = 0\,; \qquad (2_1) \quad A\Omega + M_i = K\,; \qquad (3_1) \quad A\Omega^2 = 2h\,.$$

La (3_1) mostra che il vettore Ω, e quindi $A\Omega$, conserva modulo costante durante il moto; si ha quindi che « *la velocità angolare della rotazione istantanea ha, per tutta la durata del moto, la grandezza costante* $\omega = \sqrt{(2h/A)}$ *e quindi il moto è uniforme* ». Ponendo poi $U - O = K$, $V - O = A\Omega$, $W - O = M_i$, si deduce, per la (2), $U - V = M_i$, e si vede subito che i lati del triangolo OUV hanno lunghezze costanti e, poichè la retta OU è fissa nello spazio, si conclude che « *durante il moto del corpo il triangolo* OUV *ruota rigidamente intorno all'asse* OK, *quindi il luogo delle rette* OV, *cioè il cono fisso degli assi istantanei di rotazione, è un cono di rotazione di asse* OK ». Inoltre, poichè durante il moto la retta OV fa angolo costante con OW, si trae che « *il luogo delle rette* OV *rispetto al corpo mobile, cioè il cono mobile degli assi istantanei di rotazione, è un cono di rotazione di asse* OM_i ». I due coni considerati si toccano lungo la generatrice comune $O\Omega$ ed il piano tangente comune è perpendicolare al piano OUV. Dalla (10) si ricava poi

$$(11) \qquad P = O + \frac{\Omega}{\sqrt{2h}}$$

e questo punto P descrive l'erpolodia e la polodia, perciò si vede che « *l'erpolodia e la polodia sono circonferenze descritte rispettivamente intorno ad* OK *e ad* OM_i *come assi* ». Le velocità di P, considerato come mobile, sull'erpolodia e sulla polodia sono notoriamente eguali ed il loro valore comune si ricava dalla (11) e dalla (1') e vale

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2h}}\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{A\sqrt{2h}}\Omega \wedge M_i = -\frac{2s}{A^2\sqrt{2h}}\mathbf{v}$$

dove s è l'area del triangolo OUV, e $\mathbf{v}$ è un vettore unitario normale al piano del triangolo. Si ha dunque che « *la velocità con cui* P *descrive la polodia* (o *l'erpolodia*) *è costante ed eguale a* $2s/A^2\sqrt{2h}$ ». Per calcolare le *velocità angolari* dei moti di P sull'erpolodia e sulla polodia, basta, p. es., osservare che esse sono eguali alla grandezza della velocità del punto V [che vale A mod $(d\Omega/dt)$ ossia, per la $(1_1')$, mod $(\Omega \wedge M_i)$ cioè $2s/A$] divisa rispettivamente per la distanza di V dalla retta OK e dalla retta OM_i, queste distanze valgono rispettivamente $2s/\text{mod}\,K$ e $2s/\text{mod}\,M_i$, quindi le richieste velocità hanno rispettivamente i valori $\text{mod}\,K/A$ e $\text{mod}\,M_i/A$.

Per determinare poi gli assi permanenti di rotazione basta ricorrere alla (4') ed osservare che la (4) si riduce ad $\Omega \wedge \mathbf{M}_i = 0$. Risulta immediatamente che « *l'asse* $O\Omega$ *è asse permanente di rotazione, quando e solo quando coincide con l'asse* OM_i *dei moti interni il quale, a sua volta, deve coincidere con l'asse* OK *che è fisso nello spazio* ».

Inoltre, da quanto si è detto nel n. 2, sui punti multipli della polodia, segue che la retta OK, che ora contiene i centri delle sfere (7') e (8'), passa per il punto di contatto di queste che risultano perciò tangenti fra loro, onde si ha che « *la polodia, come pure l'erpolodia, si riduce all'unico punto di contatto di tali sfere* ». Si può anche dimostrare facilmente tenendo conto delle (2_1) e (3_1) che « *le sfere* (7') e (8') *sono tangenti fra loro internamente e che la prima è interna alla seconda* ».

Fisica. — *Sulla scoperta delle leggi delle variazioni adiabatiche dello stato gazoso.* Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

Poisson (Ann. de ch. et de ph., maggio 1823) subito dopo la pubblicazione del XII libro della *Meccanica celeste* di Laplace, che egli cita, calcola il fattore $1 + \alpha\omega/(1 + \alpha\theta)\gamma$ della sua formula (2) coi risultati delle esperienze di Clément e Desormes e dimostra che esso si riduce a c_p/c_v e dimostra così il teorema di Laplace senza ricorrere ad ipotesi sulla natura del calore, basandosi unicamente sui risultati delle esperienze.

Nella stessa Memoria egli considera il seguente ciclo di operazioni (forse il primo esempio di questo genere di ragionamenti) alle quali suppone sottoposto 1 grammo d'aria: 1°) Questa viene riscaldata di dT_p a pressione costante ricevendo una quantità di calore $c_p dT_p$ e subendo un aumento di volume ∂v_p; 2°) dopo viene compressa adiabaticamente di un volume dv_q uguale a dv_p, dimodochè essa riprende il volume iniziale mentre si riscalda di dT_q; 3°) finalmente essa viene raffreddata di $dT_p + dT_q$ a volume costante e perde la quantità di calore $c_v(dT_p + dT_q)$ ritornando alla temperatura, volume e quindi anche pressione iniziali.

Poichè l'aria è ritornata allo stato primitivo, il calore ricevuto e quello perduto devone essere uguali, cioè deve essere:

$$c_p\, dT_p = c_v(dT_q + dT_p)\,, \quad \text{ossia} \quad k = 1 + \frac{dT_q}{dT_p}\,.$$

Ma dalla $pv = RT$ si ha $dT_p = p dv_p/R = -p dv_q/R$, poichè s'è fatto $dv_q = -dv_p$, e quindi si ha:

$$k - 1 + \frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0 \qquad k - 1 + \frac{v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia l' 11 agosto 1917.

ossia sottintendendo che q è costante:

$$(k-1)\frac{dv}{v}+\frac{dT}{T}=0, \qquad (7)$$

da cui integrando e poscia sostituendo pv/R a T, Poisson ricava:

$$v^{k-1}\,T = \text{costante} \quad , \quad pv^k = \text{costante}.$$

Questo ragionamento non può dirsi inesatto, tutt'al più è incompleto; siccome l'aria fa un lavoro nella prima operazione (dilatazione isobarica) e ne subisce un altro (compressione adiabatica) nella seconda, è opportuno avvertire che la differenza dei due lavori è un infinitesimo di 2° ordine [1].

Ivory (Philosophical Magazine, 1827) fece obbiezioni al ragionamento ed alla formula di Poisson e dimostrò invece una formula diversa.

Avogadro (Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino, vol. 33, 1829) esamina le dimostrazioni di Poisson e di Ivory, attribuisce in parte la diversità dei risultati a quella delle quantità considerate, ma dimostra che la formula di Ivory non è esatta che nel caso di piccole variazioni, ed allora diviene approssimativamente uguale a quella di Poisson.

Plana (Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino, serie II, vol. V, 1843) considera le diverse espressioni di dq in funzione di dp, dv, dT e delle derivate parziali di q e dimostra in modo ineccepibile l'equazione (7) di Poisson, col procedimento che ora si usa per ottenere le relazioni fra le diverse derivate parziali di q (Chwolson, Lehrbuch der Physik, vol. III, pag. 442).

[1] Questo ragionamento è molto simile a quello che ho proposto recentemente (Rend. Lincei, maggio 1914) per dedurre l'espressione di k dall'esperienza di Clément e Desormes, avvertendo che non lo ritenevo nuovo ma piuttosto dimenticato.

Siccome per comodità dell'esposizione elementare le variazioni di temperatura erano piccole ma non infinitesime, l'uguaglianza fra i due lavori suddetti non è più così rigorosa e un'avvertenza in proposito (che venne trascurata o dimenticata) sarebbe stata opportuna, sebbene non fosse indispensabile perchè evidente.

Si noti che l'errore che risulta dall'aver supposto nulla questa differenza è necessario per ottenere la solita espressione di k che è approssimativa e non potrebbe esser ottenuta con un ragionamento rigoroso; in principio o in fine o nel mezzo di questo deve essere introdotta l'approssimazione o deviazione dal rigore assoluto.

Si noti anche che le integrazioni che si effettuano in tutte le dimostrazioni della formula di Poisson suppongono che l'equazione differenziale che s'integra, rimanga valida in tutte le fasi del passaggio dall'uno all'altro limite dell'integraztone, cioè che in tutte queste fasi la pressione interna sia sempre uguale all'esterna; esse dunque suppongono implicitamente che il passaggio si effettui reversibilmente. Siccome nell'esperienza di Clément e Desormes la variazione di volume se è lentissima non è adiabatica, se è rapidissima non è reversibile, ne segue che la formula di Poisson non è rigorosamente applicabile e s'illude chi crede che il valore esatto di k sia quello « in funzione dei logaritmi delle pressioni ».

Ammettendo queste come note e dT come funzione di dp, dq, dv, si ha:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_v \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_v \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$$

ossia:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q + \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p$$

ossia:

$$k - 1 + \frac{v}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_q = 0$$

come aveva trovato Poisson.

Poisson inoltre (Ann. de ch. et de ph., ottobre 1823) ottiene l'equazione (4) in modo quasi identico a quello usato da Laplace, deducendola dalle definizioni (rigorose e generali) di c_p e c_v. Egli pone:

$$(8) \qquad \begin{aligned} c_p &= \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{v}{T}\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \\ c_v &= \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T}\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \end{aligned} \quad (^1);$$

dividendo una per l'altra queste due eguaglianze, indicando con k il rapporto c_p/c_v ottiene

$$(4) \qquad kp + \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v = v\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p$$

e supponendo k costante ed integrando, ottiene come Laplace

$$q = f(pv^k)$$

dove f è una funzione arbitraria. Da questa equazione per q costante egli deduce la formula $pv^k =$ costante.

[1] Anche a Poisson, che pure cercava l'espressione di q, è sfuggito che da queste sue definizioni risulta che q non è funzione di p, v, T. Da esse difatti si ottiene:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = c_p \frac{T}{v} = c_p \frac{p}{R} = k\frac{c_v}{T} \qquad \left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v = c_v \frac{T}{p} = c_v \frac{v}{R}.$$

Differenziando la prima equazione rispetto a p, la seconda rispetto a v, e siccome dalla esperienza risulta che c_p e k e quindi c_p e c_v sono costanti, si ha:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial v\,\partial p} = \frac{kc_v}{R} \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial p\,\partial v} = \frac{c_v}{R}$$

l'ordine delle differenziazioni influisce sul risultato, dunque q non è funzione di p, v, T. Evidentemente Poisson ha creduto superflua questa verificazione e non si è curato di farla.

Questa è la dimostrazione che egli riproduce nel II volume del suo trattato di Meccanica, citata senza osservazioni dal Clausius (Abhandlungen, vol. I, pag. 46) riprodotta pure senza osservazioni dal Mach e da Von Lang; non può dirsi che essa sia meno esatta di quella di Laplace perchè non ne differisce; non è probabile che contenga un errore evidente perchè i suddetti autori non ne fanno cenno.

Nè Laplace nè Poisson fanno cenno del metodo d'integrazione dell'equazione a derivate parziali di 1° ordine semplicissima; si deve dunque supporre che essi seguano un metodo ben noto, e ciò conferma l'uso che entrambi fanno della funzione arbitraria (integrale generale), ma si può supporre che questo metodo non sia applicabile nel caso attuale perchè q non è funzione di p, v, T (ciò che Laplace e Poisson ignoravano), ma invece è dq funzione di dp, dv, dT; però questa difficoltà non sussiste. Difatti non si può dubitare della relazione usitatissima:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p dv = dq$$

ed a questa paragonando l'equazione generale da integrare:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v \mathrm{A} + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p \mathrm{B} = \mathrm{C}$$

che deve esserle identica, si ricava

$$\frac{dp}{\mathrm{A}} = \frac{dv}{\mathrm{B}} = \frac{dq}{\mathrm{C}}$$

le due solite equazioni da cui si ricavano direttamente i due integrali particolari. Nel caso attuale essendo:

$$kp\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)_v - v\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_p = 0$$

si ricava

$$\frac{dp}{p} = k\frac{dv}{v} = \frac{dq}{0}.$$

I primi due membri dànno l'integrale $pv^k =$ costante, il terzo con uno qualsiasi dei primi due dà l'altro integrale particolare $q = 0$, ed il primo è quello che vale nel caso presente nel quale invece l'integrale generale $q = f(pv^k)$ non è ammissibile, perchè suppone che q possa ritenersi uguale a qualunque funzione di pv^k, mentre invece q non può essere uguale a nessuna funzione di p e v neppure quindi di pv^k.

Alla stessa relazione $pv^k =$ costante si giunge più semplicemente ponendo nella (9) $dq = 0$, portando il secondo termine nel secondo membro e dividendo per la (4) ed integrando ([1]).

Concludendo, mi pare che Laplace e Poisson abbiano contribuito a gara ed in misura pressochè uguale alla formula della velocità del suono ed a quella delle variazioni adiabatiche.

Laplace ha ottenuto due equazioni dalle quali appare o si deduce facilmente una delle formule adiabatiche, ma di esse non si è occupato, e difatti neppure si è curato di dare il facile integrale della (6) che è appunto la prima formula. Poisson invece ha cercato ed ottenuto due delle formule adiabatiche (da cui facilmente si deduce la terza) mediante due ragionamenti, uno dei quali fu già usato da Laplace. A me parrebbe che autore delle formule debba dirsi Poisson che le ha cercate e trovate e non Laplace che avrebbe potuto trovarle, ma non se ne è occupato.

Fisica. — *Dimostrazione sperimentale della costanza di velocità della luce riflessa da uno specchio in moto.* Nota di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio P. BLASERNA ([2]).

Mi riferisco a quanto ho esposto in una precedente Nota, e indico ora il metodo adottato e i risultati ottenuti, studiando il valore della lunghezza d'onda di un raggio di luce monocromatica, riflesso da uno specchio in moto. Ricordo anzitutto che molti sono i lavori teorici sull'argomento, e fra essi cito quelli di Abraham, Plank, Edser, Larmor, Brown, Harnack. Essi fanno del problema sia uno studio puramente geometrico, sia un'applicazione della teoria elettromagnetica.

Senza entrare nella discussione di tali studî, possiamo accettare le conclusioni di Harnack ([3]) circa la frequenza delle vibrazioni riflesse da uno specchio in moto uniforme. Sia v la velocità di questo normalmente al suo piano, contata positivamente verso la sorgente; c la velocità del raggio di

([1]) Non mi pare che si possa dire che in forza del principio dell'equivalenza, dq non è un differenziale esatto, ma piuttosto che esso dà l'espressione analitica di dq e da questa con la nota regola di calcolo differenziale si riconosce se dq è, oppure non è, un differenziale esatto. Così p. es. nel caso importantissimo della fusione o solidificazione, se il corpo non è volatile e trovasi nel vuoto, oppure se la variazione di volume è nulla, la forma primitiva del suddetto principio $dq = du + pdv$ ci dà $dq = du$ e quindi esso c'insegna che dq è un differenziale esatto, perchè lo è du.

Così pure nel caso delle variazioni adiabatiche di stato per un corpo qualunque siccome $dq = 0$, sarà $\partial^2 q/\partial p \partial v = 0 = \partial^2 q/\partial v \partial p$, quindi dq è un differenziale esatto.

([2]) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1917.

([3]) Ann. d. Phys., 1912, 39, pag, 1053; 1915, 46, pag. 547.

luce nel vuoto, che incide con l'angolo ϑ sullo specchio; n, n' le frequenze del raggio prima e dopo la riflessione, supponendo sorgente ed osservatore in riposo. Ponendo $\beta = v/c$, sarà:

$$n' = n \frac{1 + 2\beta \cos\vartheta + \beta^2}{1 - \beta^2}$$

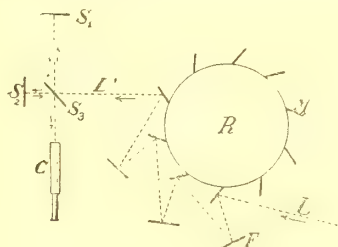
la quale si riduce a $n' = n(1 + 2\beta \cos\vartheta)$, trascurando i termini in β^2. Questa formula è la stessa di quella di Ketteler [1] adoperata da Belopolski [2] per uno studio sperimentale sull'effetto Doppler, e dedotta semplicemente dalla considerazione che l'immagine della sorgente si muove con velocità $2v$ lungo la normale allo specchio, e che quindi la componente di tale velocità lungo il raggio riflesso è $2v \cos\vartheta$.

Se si suppone poi che il raggio venga, con opportuni artifici, riflesso con l'incidenza ϑ, k volte su varî specchi mobili ciascuno con la velocità v, sarà $n' = n(1 + 2k\beta \cos\vartheta)$. Per cui, secondo la ipotesi della costanza della velocità della luce, trascurando al solito i termini in β^2, sarà: $\lambda' = \lambda(1 - 2k\beta \cos\vartheta)$. Supponendo invece che la velocità della luce riflessa varii (sommandosi a $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm. la componente lungo il raggio, della velocità dell'immagine), sarà tale velocità $c + 2kv \cos\vartheta$, e quindi, analogamente a quanto fu visto per la sorgente mobile, nella Nota precedente, essendo qui $n'\lambda' = c + 2kv \cos\vartheta$ e $c = n\lambda$, si ha $\lambda' = \lambda$. Si tratta dunque di vedere se sperimentalmente si osserva o no, insieme con l'effetto Doppler, un mutamento nel valore di λ; rimanendo così confermata o meno, la immutabilità del valore della velocità della luce per la riflessione su specchio mobile. Non ho proceduto all'osservazione dell'effetto Doppler nelle attuali ricerche, analogamente a quanto ha fatto Belopolski, giacchè sul suo valore non vi può essere alcun dubbio; ho voluto invece ricercare se e come varia λ al variare della velocità di specchi mobili, come ora sarà detto.

La disposizione adottata da Belopolski per lo studio dell'effetto Doppler, aveva l'inconveniente della eccessiva sottigliezza del raggio luminoso, necessaria per ottenere riflessioni multiple sullo stesso specchio; con ciò quell'autore era costretto a rilevare fotograficamente e con lunghe pose, lo spostamento delle righe. Io preferisco adottare la disposizione schematica della figura. Una ruota di ottone R orizzontale di 35 cm. di diametro (spessore 6 mm.), capace di compiere sino a 80 giri a 1″, porta alla periferia 10 specchi (come M) piani, verticali, di vetro argentato posteriormente, rettangolari di 30 × 35 mm. La velocità dei centri degli specchi in corrispondenza della massima velocità di rotazione della ruota, risulta dunque di più che 100 m. a 1″. Il numero dei giri a 1″ della ruota è, in ogni esperienza,

(1) Astronomische Undulationtheorie.

(2) Communications Ac. Russe, 1900, 13, pag. 461.

determinato acusticamente. Gli specchi, egualmente spaziati, sono inclinati ciascuno sul raggio di R passante per il proprio centro di un angolo $\alpha = 29°$. Essi sono fissati solidamente su R mediante congegni a vite capaci di permetterne il rigoroso regolaggio. Il sostegno dei cuscinetti dell'asse di R porta altri specchi fissi, pure verticali come F, il cui numero è di 3 in figura; ma tale numero può a volontà essere ridotto, od accresciuto sino a 9. La posizione degli F e degli M è tale che un fascio di luce parallela L, dopo un certo numero di riflessioni (7 in figura) sugli M e sugli F, può venire raccolta in L', quando R ha determinate posizioni angolari. Naturalmente la intensità di L' è notevolmente affievolita rispetto ad L; tale affievolimento è poi molto maggiore se R entra in rotazione, giacchè solo

in certi brevi istanti (10 volte ogni giro) la luce arriva in L'. Praticamente ho osservato, che le quattro riflessioni mobili, e le tre fisse della figura consentono ancora di sperimentare con luce sufficientemente intensa in L', anche se R è in moto; ciò anche procedendo all'osservazione diretta (cioè senza bisogno di fotografie) del fenomeno luminoso.

Per studiare il valore di λ, la luce L' viene esaminata con il ben noto interferometro di Michelson (1), indicato schematicamente in figura. È noto che se le distanze $S_1 S_3$ e $S_2 S_3$ sono esattamente eguali, col cannocchiale C, si osservano frangie anche se la luce non è monocromatica, e tali frangie hanno le colorazioni degli anelli di Newton. Non appena interviene una piccola differenza di cammino (anche solo qualche μ) fra i due raggi interferenti, l'osservazione delle frangie non è più possibile con luce bianca. Oc-

(1) Non avendone a mia disposizione, ne ho costruito uno con i seguenti ripieghi che suggerisco a chi volesse fare ricerche analoghe. Il banco di sostegno è quello di una buona macchina a dividere, da cui sono state svitate le parti inutili e aggiunti i congegni di sostegno e regolaggio dell'inclinazione dei tre specchi. La vite della macchina (passo 1 mm.) comanda lo specchio mobile. I tre specchi sono stati ottenuti argentando totalmente o lievemente, lastre di vetro opportunamente scelte. Mi sono servito di preferenza dei vetri rigorosamente a facce piane e parallele tolti da prismi di Steinheil, di cui di solito sono forniti i laboratorii; questo materiale è ottimo e risponde perfettamente alla precisione di lavorazione di almeno $^1/_{10}\,\lambda$, necessaria allo scopo (v. Rayleigh, Phil. Mag., 1917, 33, pag. 161).

corre luce monocromatica, e l'ordine di interferenza delle singole frangie cresce al crescere della detta differenza. La loro visibilità permane tanto più, quanto maggiore è la semplicità di struttura delle vibrazioni luminose. Dalle ricerche di Michelson [1] risulta che, sotto tal riguardo, la riga che dà la maggior visibilità di frangie è quella verde del mercurio ($\lambda = 546\ \mu\mu$). Le frangie circolari all'infinito sono, in tal caso, visibili anche per una differenza di cammino $l = 2(S_1S_3 - S_2S_3) = 40$ cm. Ho quindi adoperato come sorgente luminosa L l'arco a mercurio nel vuoto, la cui luce è opportunamente filtrata a traverso soluzioni di cromato neutro di potassio e di cloruro di nichel, per assorbirne le righe violetta e gialle; ho potuto così osservare abbastanza nettamente le frangie circolari all'infinito col cannocchiale C, anche per $l = 32$ cm. Ma per le attuali ricerche mi sono quasi sempre limitato a fare $l = 13$ cm., od anche meno.

Questa disposizione è particolarmente adatta per rivelare piccolissimi cambiamenti nel valore della lunghezza d'onda incidente; infatti, essendo notevole il valore di l, in questo tratto entra un gran numero di λ (p. e. 200.000, se $\lambda = 0{,}5\ \mu$, ed $l = 10$ cm.) e, corrispondentemente, si possono osservare notevoli spostamenti nella posizione di una frangia.

Così disposta l'esperienza, supponiamo di puntare una frangia, p. e. la prima centrale luminosa, col filo del reticolo di C, quando R si trova nella posizione della figura, o meglio quando gira con trascurabile velocità (1 giro a 1''). Si accresca la velocità di R sino a 60 giri a 1''; *si osserva allora nettamente uno spostamento nella frangia puntata*, che, se gli specchi mobili vanno incontro al raggio incidente, indica diminuzione di λ; lo spostamento è poi esattamente eguale e di segno contrario, se la ruota gira in senso opposto con egual velocità, il che indica accrescimento di λ. Per precisare il verso secondo cui avviene lo spostamento, dirò che, considerando il sistema di frangie circolari col cannocchiale all'infinito, il diametro di ciascuna di esse *cresce* quando gli specchi vanno incontro al raggio incidente, e le frangie stesse si *infittiscono*, perchè quelle di grande diametro variano poco; il fenomeno è accompagnato dall'*uscita* di nuove frangie dal centro del sistema. Viceversa quando gli specchi si muovono nel senso di propagazione della luce incidente, il diametro delle frangie *diminuisce*, esse si *diradano*, e qualcuna rimane come *inghiottita* dal centro.

Prima di dire quale sia la misura dello spostamento osservato, cerchiamo di prevederlo, facendo l'ipotesi che la velocità della luce riflessa dallo specchio in moto, sia la stessa di quella della luce incidente. Detto g il numero di giri a 1'' di R, e d il diametro di questa, contato fra i centri di due specchi M opposti, sarà πdg la velocità di traslazione istantanea di questi. Essendo poi essi inclinati per l'angolo α sul raggio della ruota pas-

[1] Travaux et Mémoires, Bur. int. p. et mes., 1895, XI, pag. 146.

sante per ciascuno, la componente di quella velocità, normalmente al loro piano sarà $v = \pi d g \cos\alpha$. Per cui si ha:

$$n' = n\left(1 + \frac{2k\pi d g \cos\alpha \cos\vartheta}{c}\right);$$

e secondo la fatta ipotesi della immutabilità di c, essendo così $c = n\lambda = n'\lambda'$:

$$\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{2k\pi d g \cos\alpha \cos\vartheta}{c}\right).$$

Essendo ora l la differenza di cammino dei due raggi interferenti nell'apparecchio di Michelson, il numero delle frangie che si vedrà passare sul filo del reticolo quando λ diventa λ', ossia quando la velocità di rotazione varia da zero a g giri a 1″ sarà:

$$f = \frac{l}{\lambda} \frac{2k\pi d g \cos\alpha \cos\vartheta}{c}.$$

Se poi si procede all'osservazione, partendo dalla posizione delle frangie quando la ruota gira in un senso con velocità g, e rilevando poi la nuova posizione di quelle, per una velocità di rotazione eguale e contraria, il numero di frangie spostatesi sul reticolo sarà $2f$.

Ora, nel mio apparecchio, $d = 38$ cm., $\alpha = 29°$, $\vartheta = 27°$, $k = 4$ (caso della figura); ponendo $\lambda = 0{,}546\ \mu$ (riga verde dell' Hg), $l = 13$ cm., $c = 3.10^{10}$ cm., e $g = 60$ (giri compiuti da R a 1″, prima in un senso e poi nell'altro); si prevede, secondo la formola riportata, per la inversione della velocità di R, uno spostamento di frangie $2f = 0{,}71$.

Effettivamente, procedendo all'esperienza, l'osservazione dà, per il caso citato, uno spostamento compreso fra 0,7 e 0,8 frangie; e non è possibile, per ragioni di visibilità, spingere oltre la precisione della osservazione. Ma, come si vede, la concordanza tra il risultato previsto e l'osservato è sufficiente; essa è poi confermata dalle osservazioni fatte, scegliendo opportunamente altri valori di l e di g, e che, per brevità, non riporto.

I limiti di questa Nota non mi consentono dar notizia delle numerose difficoltà incontrate nella presente ricerca, e degli accorgimenti necessarî per procedere ad una osservazione netta e sicura del detto spostamento. Mi riprometto, per altro, di ritornare sull'argomento, in una più ampia prossima pubblicazione.

L'esperienza, dunque, porta alla conclusione che *la riflessione della luce su di uno specchio metallico mobile, non modifica la velocità di propagazione della luce stessa nell'aria, e quindi, con grande probabilità, anche nel vuoto*; ciò almeno nelle condizioni della descritta esperienza.

Questo risultato sperimentale, su cui non può formularsi il menomo dubbio, è nettamente contrario all'ipotesi di alcuni autori, come lo Stewart [1] che, fondandosi sulla teoria emissiva elettromagnetica di Thomson, affermano la possibilità che la luce, dopo riflessione, si propaghi con la velocità $c + v$; dove v è la componente della velocità dell'immagine della sorgente, nella direzione del raggio riflesso.

Per completare queste ricerche è mia intenzione, come ho già accennoto, studiare inoltre, con la stessa disposizione interferenziale, la velocità di propagazione della luce emanata da una sorgente posta artificialmente in moto: ma tanto su ciò, che sulle conclusioni generali che da queste ricerche si possono trarre, mi riservo di riferire a suo tempo.

Chimica tecnologica. — *Sui combustibili fossili italiani* [2]. Nota II di Giovanni Sani, presentata dal Socio Koerner [3].

Il fatto che i pentosani in confronto degli altri idrati di carbonio (eccetto il cellulosio) che costituiscono i vegetali presentano una non lieve resistenza agli agenti di idrolisi di origine organica (enzimi idrolittici) ed ai fermenti organizzati, faceva prevedere di trovarli presenti almeno in parte nei combustibili fossili a carbonizzazione non molto avanzata, mentre, in questo concetto, dovevano invece essere scomparsi nelle ligniti picee e nei carboni a disorganizzazione completa o quasi.

Saggi qualitativi hanno indicata marcata la reazione del furfurolo nei primi materiali, nulla nei secondi, sicchè mi sembrò conveniente determinarne la quantità per risalire poi da questa ai composti padri.

Le determinazioni vennero eseguite seguendo il metodo di Councler alla floroglucina ed anche per queste furono presi, come termini di paragone, gli stessi legni che servirono per le precedenti ricerche.

Ecco i risultati ottenuti:

	Pentosani	
Torba leggera (Iseo) ing. Andrea Zuccoli	8.14	%
Torba compatta (Iseo) ing. Andrea Zuccoli	4.00	»
Torba (Campobasso-Pescolanciano) Franzini Gaetano .	4.09	»
Lignite xiloide (Perugia Collepepe) Sani [4]	8.14	»
Lignite xiloide (Spoleto Morgnano) ing. Luigi Fasi. .	4.20	»

[1] Phys. Rev., 1911, XXXII, pag. 418.

[2] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria del R. Ist. Sup. di Agric. di Perugia.

[3] Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1917.

[4] In questa lignite ho trovato delle esclusioni di resina che ne indicherebbero l'origine probabile.

		Pentosani
	Lignite xiloide (Campalli Castelline Chianti) . . .	3.86 %
	Lignite picea compatta (Poggio Mirteto Roccantica) .	0.3056 »
	Lignite picea compatta (Pietrafitta Perugia)	0.3356 »
	Lignite-carbone (Ribolla) Société générale des lignites en Italie	0.00 »
Miniere di Sardegna	Bacu Abis	0.00 »
	» Derna	0.00 »
	» Rodi.	0.00 »
	» Ferruccio	0.00 »
	Legno di quercia (*quercus robur*)	18.42 »
	Legno di Pitch-pine (*Pinus rigida*)	8.72 »

Sui furfurogeni e sulla loro sorte nella utilizzazione industriale dei nostri combustibili fossili sarà argomento nella prossima Nota; frattanto dai dati soprariferiti risulta che la quantità dei pentosani è inversamente proporzionale al grado di carbonizzazione dei combustibili fossili, come si verifica pei metossili ed a guisa di questi, vanno scomparendo nelle ligniti brune compatte, per essere poi nulli nei carboni sardi.

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.* Nota IV di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. Caso III. Satellite perturbatore interno ($a' < a$). — Passiamo ora ad esaminare il caso in cui l'ipotetico satellite perturbatore sia interno, cioè più vicino a Nettuno del satellite noto. Conserveremo gli stessi simboli adottati nelle precedenti Note [2] e porremo $\frac{a'}{a} = \beta$, donde $\beta < 1$. Tenendo presente la teoria dello Charlier [3], le equazioni (15), (9) e (11) della Nota II si modificheranno ora in

$$m \operatorname{sen} i = m' \sqrt{\beta} \operatorname{sen} i' \tag{1}$$

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} \tag{2}$$

$$\left\{ m \sqrt[3]{\frac{n^2}{n'^2}} + m' \frac{n}{n'} \right\} \lambda(\beta) = -\frac{\pi}{n'} \frac{d\omega'}{dt} = -\frac{\pi}{n'} \frac{d\omega}{dt} \tag{3}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1917.

[2] Cfr. Rendiconti Lincei, 1915, 1° sem., pag. 569; 1916, 2° sem., pag. 433; 1917, 2° sem., pag. 94.

[3] Cfr. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, T. I, pp. 274, 346, 348 e 361.

giacchè, riferendoci noi al piano invariabile, si ha, per il teorema di Jacobi, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt}$.

Da queste tre equazioni, abbiamo:

$$(4) \qquad \frac{\lambda(\beta)}{\sqrt{\beta}} = -\pi \frac{\frac{d\omega}{dt}}{mn \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i'} \right\}}.$$

Ciò fatto, sostituiamo al posto di π, $\frac{d\omega}{dt}$, m, n, i, i loro valori numerici e supponiamo al solito che l'inclinazione i' non sia troppo grande, avendosi p. es. $i' \leqq 30°$. La (4) si trasformerà allora nell'ineguaglianza:

$$(5) \qquad \frac{\lambda(\beta)}{\sqrt{\beta}} \leqq 0{,}16079\,.$$

2. Nella Nota II ([1]) dimostrammo che, nell'intervallo $0 \leqq \beta \leqq 1$, $\lambda(\beta)$ è una funzione crescente dell'argomento. Vogliamo ora far vedere che questa proprietà (prendendo $\sqrt{\beta}$ col segno positivo) vale anche per la funzione

$$(6) \qquad \mathrm{L}(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{\sqrt{\beta}} =$$

$$= \frac{1}{(1-\beta^2)\sqrt{\beta}} \left\{ \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta - \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} \right\}.$$

Derivando, infatti, si ha

$$(7) \qquad \mathrm{L}'(\beta) = \frac{2\beta\lambda' - \lambda}{2\beta\sqrt{\beta}}\,;$$

dalla quale valendoci dell'ineguaglianza (21) dimostrata nella Nota seconda, cioè:

$$(8) \qquad \lambda' > \frac{2\beta + \beta^3}{(1-\beta^2)^3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta$$

risulta sostituendo per $\lambda(\beta)$ il suo valore:

$$(9) \qquad \mathrm{L}'(\beta) > \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}\,(1-\beta^2)^3} \Bigg[(4\beta^2 + 2\beta^4) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta -$$

$$- (1-\beta^4) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta + (1-\beta^2)^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} \Bigg] >$$

$$> \frac{4\beta^4 + 2\beta^2}{2\beta\sqrt{\beta}\,(1-\beta^2)^3} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\, d\vartheta > 0\,.$$

([1]) Nota II, n. 7. Questi Rendiconti, 1916, 2° sem., pag. 437.

Ne segue quindi che, nell'intervallo $0 \leqq \beta \leqq 1$, se $\sqrt{\beta}$ si sceglie positiva [1], anche la derivata $L'(\beta)$ sarà positiva, ciò che dimostra la nostra asserzione.

Osserveremo ancora che $\lambda(\beta)$ è regolare nell'intorno del punto $\beta = 0$, e può quindi essere sviluppata in quell'intorno in serie di Mac-Laurin.

Eseguendo il calcolo vediamo che $\lambda(\beta)$ presenta ivi uno zero di secondo ordine. Ne segue che anche $L(\beta)$ si annullerà per $\beta = 0$.

D'altra parte è facile vedere che $L(\beta)$ diviene infinita per $\beta = 1$.

Riepilogando dunque *possiamo asserire che* $L(\beta)$ *nell'intervallo*

$$0 \leqq \beta \leqq 1,$$

è una funzione crescente dell'argomento, la quale si annulla nell'estremo inferiore e diviene infinita nell'estremo superiore.

3. Da questa proprietà possiamo trarre un'importante conseguenza, vale a dire che l'ineguaglianza (5) può essere invertita; o, in altre parole, che *l'ineguaglianza* (5) *determina un limite superiore per* β.

Eseguendo il calcolo numerico, con metodi analoghi a quelli di Newton ed Horner per le equazioni algebriche, abbiamo:

$$\beta \leqq 0{,}1601; \tag{10}$$

da cui, ricordando che la distanza media a del satellite noto è uguale a 13,33, risulta:

$$a' \leqq 2{,}138. \tag{11}$$

Abbiamo così trovata la massima distanza media ammissibile dell'ipotetico satellite da Nettuno, nel caso in cui esso si supponga interno.

Il minimo valore di a' è evidentemente $a' = 1$, cioè il semidiametro equatoriale di Nettuno. Dalla (3) si ha poi:

$$m' = -\pi \frac{d\omega/dt}{n\lambda(\beta)} - \frac{m}{\sqrt{\beta}} = \frac{0{,}00007268}{\lambda(\beta)} - \frac{0{,}000291}{\sqrt{\beta}}. \tag{12}$$

4. Riepilogando dunque quanto abbiamo trovato rispetto alla posizione dell'ipotetico satellite perturbatore, possiamo distinguere *due zone di possibile esistenza* separate tra loro da una terza zona che chiameremo « *zona lacunare* » e cioè:

A) Zona esterna. — Essa si estende da $a' = \infty$ ad $a' = 31{,}84$. Come vedemmo, se il satellite perturbatore si trovasse in questa zona, il *minimo* valore della sua massa sarebbe $\mu = 0{,}000104$ e la sua grandezza

[1] Osserviamo che se n ed n' fossero di segno contrario occorrerebbe prendere $\sqrt{\beta}$ negativo.

fotometrica $G = 14{,}34$. *Ci sembra quindi di poter escludere che l'ipotetico satellite esista in questa zona.*

B) Zona lacunare. — Essa si estende da $a' = 31{,}84$ ad $a' = 2{,}138$. *In questa zona il satellite perturbatore non può certamente trovarsi*; ben inteso supponendo l'eccentricità piccola e l'inclinazione $i' \leqq 30°$.

C) Zona interna. — Essa si estende da $a' = 2{,}138$ ad $a' = 1$. Esaminando la (12) si scorge immediatamente che in questa zona la massa m' del satellite perturbatore è funzione *decrescente* della sua distanza media a'. Servendoci della (12) ed eseguendo i calcoli numerici, purtroppo assai lunghi e penosi, abbiamo infine la seguente

Tabella.

a'	m'	m'/m	G	$\Delta^{('')}$	a'	m'	m'/m	G	$\Delta^{('')}$
1,200	0,00278	9,553	11,96	0'',22	1,800	0,00084	2,883	12,81	0'',89
1,400	0,00183	6,294	12,26	0'',45	2,000	0,00056	1,917	13,12	1'',12
1,600	0,00130	4.474	12,51	0'',67	2,138	0,00042	1,427	13,33	1'',29

In questa tavola abbiamo indicato con $\Delta^{('')}$ la massima distanza apparente, in secondi d'arco, dell'ipotetico satellite dall'orlo del disco planetario, quando Nettuno è all'opposizione; G è la grandezza fotometrica.

5. Se esaminiamo ora questa tabella, ci convinceremo che è assai poco probabile che il satellite perturbatore esista in questa zona. Infatti, se noi ammettiamo che esso sia molto vicino a Nettuno, la sua massa diviene rilevante rispetto a quella del satellite noto; ed allora probabilmente esso sarebbe stato qualche volta osservato. Se, invece, lo supponiamo più lontano dal pianeta, le sue condizioni di visibilità risulterebbero assai migliorate; e, data la sua grandezza fotometrica, esso sarebbe stato certamente scoperto da molto tempo.

6. Si potrebbe estendere questo studio al caso di forti eccentricità ed inclinazioni; ma, data la poca probabilità di questa ipotesi, una tale ricerca avrebbe più della virtuosità che dell'interesse astronomico. *Concludendo dunque, crediamo di poter affermare che l'ipotesi di Struve, che attribuisce le perturbazioni del satellite di Nettuno all'attrazione di un secondo satellite sconosciuto, deve essere abbandonata. Resta quindi come unica teoria, degna da seguirsi, quella di Newcomb e Tisserand; la quale, come è notissimo, fa dipendere queste perturbazioni dal rigonfiamento equatoriale di Nettuno.*

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 6°, Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXV. (1892-1917). Fasc. 1°-2°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc.° 5.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 7.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 7°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Chimica. — *Considerazioni sulla natura dell'affinità chimica e della valenza degli atomi.* Nota del Socio G. Ciamician e di M. Padoa [1].

I.

Le leggi generali dell'affinità sono indipendenti dalle differenze qualitative della materia e furono scoperte ed applicate senza il concorso della ipotesi atomica, in modo che questa poteva apparire superflua per la rappresentazione della parte più essenziale dei fenomeni chimici. Fino a che essa non aveva altra conferma di fatti all'infuori delle leggi stechiometriche e fino a che gli atomi erano considerati inalterabili e costituenti le ultime particelle elementari, l'ipotesi atomica non poteva essere considerata indispensabile a spiegare i fenomeni dell'affinità chimica.

Ora, peraltro, le cose sono assai mutate; le ingegnose ricerche fatte segnatamente in certi campi della fisica e la scoperta dei corpi radioattivi hanno dato un insperato nuovo fondamento sperimentale alle teorie della costituzione granulare della materia e però la esistenza reale degli atomi e delle molecole si impone come conseguenza logica di tutti i fatti conosciuti. Gli atomi, inoltre, non possono più essere considerati come le più semplici particelle primordiali. ma bensì come elementi materiali di assai complessa struttura interna. Però il problema dell'affinità si presenta sotto un altro aspetto: mentre prima si poteva fare astrazione, come realmente s'è fatto. dall'ipotesi atomica, accontentandosi delle leggi generali quali

[1] Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1917.

scaturiscono dall'applicazione del secondo principio della termodinamica, ora invece, essendo gli atomi le unità fisiche delle quali non si può non tener conto, apparisce indispensabile farle intervenire nelle considerazioni che riguardano la vera essenza dei fenomeni chimici. Questi dipendono dalla intima costituzione degli atomi, da cui naturalmente derivano le differenze qualitative della materia, che sono collegate con le forze chimiche. L'affinità apparisce come una forma di energia che può trasformarsi, secondo le sue leggi fondamentali, in modo invertibile in calore od in energia elettromagnetica.

Le relazioni che passano fra l'energia chimica e quella termica discendono dai principî della termodinamica: apparisce ora necessario ricercare quale significato possono acquistare queste relazioni, tenendo conto delle attuali vedute intorno alla costituzione degli atomi. Secondo la teoria cinetica, allo zero assoluto ogni movimento di questi è spento, come pure sembra sia annullata la loro capacità calorifica. L'energia interna degli atomi invece, come lo dimostrano i fenomeni dei corpi radioattivi e le esperienze di Moissan sul comportamento del fluoro e dell'idrogeno solidi, che reagiscono ancora con violenza, non si esaurisce alle temperature estremamente basse. V'è dunque una energia interna degli atomi che non dipende dai loro movimenti esteriori. Che le azioni chimiche, misurate dalla velocità di reazione, siano proporzionali alla concentrazione e siano accelerate dagli innalzamenti di temperatura, non è difficile comprendere in base alla teoria cinetica. Ma la temperatura influisce anche altrimenti sugli equilibrî chimici, come ha insegnato van't Hoff specialmente per le dissociazioni. Che cosa significa in queste l'assorbimento di calore, come in genere in tutti i processi endotermici? Evidentemente esso sta a misurare la trasformazione del movimento esteriore degli atomi in movimento dei loro intimi componenti o, in genere, in energia atomica interna, che naturalmente può essere anche potenziale. Se non si ammettesse nei composti endotermici questa variazione dell'energia interna degli atomi, bisognerebbe pensare che i legami fra atomi ed atomi richiedessero una spesa di energia per la loro formazione, ciò che non si accorderebbe con le varie rappresentazioni elettromeccaniche pensabili per gli atomi stessi. Secondo il nostro modo di vedere, la formazione di tali legami, nei composti endotermici, darebbe luogo, come negli esotermici, ad uno sviluppo di energia, il quale però non compenserebbe il dispendio di energia occorrente per accrescere l'energia interna degli atomi che si combinano: pertanto la somma algebrica delle energie messe in giuoco in tali combinazioni, risulta negativa.

Il calore, secondo la teoria cinetica, è rappresentato dalla forza viva di vibrazione o di traslazione degli atomi e delle molecole: un processo invertibile in cui l'energia chimica si trasforma in energia termica e viceversa, rappresenta quel meccanismo pel quale il movimento progressivo o

vibratorio degli atomi si trasforma in modo invertibile in energia potenziale o in movimento interno dei loro componenti. Si potrebbe dire che l'energia libera degli atomi sia quella frazione della loro energia interna che può uscire in forma di calore o, altrimenti, senza che l'atomo si scomponga.

II.

Ammettendo che l'affinità sia, come apparisce necessario, una funzione dell'energia interna degli atomi, si potrebbe ricercare da che cosa essa sia più precisamente determinata. A questo proposito sono state fatte le più svariate supposizioni nella cui analisi noi non vogliamo entrare.

Oltre alle attrazioni elettrostatiche di cui l'atomo è capace per perdita od acquisto di elettroni, si possono ammettere attrazioni elettrostatiche fra atomi neutri, seguendo le ingegnose considerazioni e sviluppi di Rutherford (1) e di Bohr (2), secondo i quali un elettrone ruotando intorno ad un atomo, con una piccola massa positiva nel suo centro, può esercitare sopra un altro atomo o ione positivo delle azioni elettrostatiche di carattere opposto a seconda della distanza a cui si trova. Questa supposizione è stata pure sostenuta dal Crehore, il quale ha cercato di dimostrare come con un simile schema si possono costruire delle formole di composti, specialmente organici (3). Finalmente, per non citare che le ipotesi principali, Ramsay (4). probabilmente nel suo ultimo lavoro, ha tentato di spiegare le azioni chimiche con attrazioni elettromagnetiche per effetto dell'azione reciproca di circuiti costituiti dalle orbite di elettroni, che possono essere diverse secondo il senso di rotazione intorno all'atomo.

A noi sembra peraltro che, per rendersi conto della parte essenziale del fenomeno chimico non sia sufficiente invocare attrazioni elettrostatiche o elettrodinamiche; qualunque sia la supposizione che si voglia fare sulla natura dell'affinità chimica, bisogna, secondo il nostro avviso, tener presente un coefficiente, che può essere incluso tacitamente in alcune delle ipotesi sopra citate, ma che va posto in speciale rilievo: esso si riferisce alla caratteristica del fenomeno chimico, che ha servito sempre a definirlo nella sua generalità, che consiste nel mutamento, alle volte lieve, ma spesso profondo, delle proprietà del composto rispetto a quelle dei componenti.

Conviene riflettere che due corpi, per quanto piccoli, come sarebbero gli atomi, non possono senz'altro mutare essenzialmente le loro proprietà perchè posti in condizioni tali da esercitare reciprocamente un'attrazione qualsiasi. Il fenomeno chimico è di natura così speciale, che non può con-

(1) Phil. Mag., *21* (1911), 669; *27*, 488.
(2) Phil, Mag., *26*, 1, 476, 857; *29*, 332; *30*, 394.
(3) Phil. Mag., *30*, 613.
(4) Proc. Roy. Soc., London, serie A, *92*, 451.

sistere soltanto in uno scambio di attrazioni. È stata appunto questa difficoltà che ha indotto gli avversari dell'atomismo a considerare di poco valore l'antica ipotesi di Dalton perchè essa non poteva dare ragione delle differenze fra le proprietà degli elementi liberi e quelle dei loro composti. Come ora si sa, per le famose esperienze dei Bragg, nei cristalli gli atomi sono semplicemente giustapposti e, per esempio, in un cristallo di cloruro di sodio le due specie di atomi si alternano nel reticolo cristallografico in modo che le singole molecole si confondono in un regolare avvicendarsi degli atomi di sodio e di cloro. In che cosa consisterebbe la differenza fra il cloruro di sodio cristallino ed un miscuglio in cui gli atomi di sodio e cloro, presenti in egual numero, fossero disposti con la stessa regolarità?

Noi crediamo però che la parte essenziale del fenomeno chimico consista in una modificazione della struttura interna che l'atomo subisce all'atto della combinazione, e che può avvenire con perdita o acquisto di energia. Gli atomi nelle molecole sono giustapposti, ma la loro interna struttura non è più quella dell'atomo libero [1].

Queste modificazioni di struttura interna possono determinare attrazioni di origine elettrostatica od elettrodinamica. Così rimane superata la difficoltà che per alcuni presentava l'ammettere che nei composti gli atomi continuassero ad esistere inalterati con tutte le loro proprietà, perchè si possono riavere tali e quali dalla combinazione. Bisogna invece ammettere che la struttura degli atomi si modifichi nell'atto della combinazione e venga ripristinata quando l'elemento ritorna allo stato libero.

Quale sia l'indole di questi mutamenti è naturalmente per ora impossibile conoscere. Le diverse supposizioni che si sono fatte in questi ultimi

[1] La cambiata struttura interna degli atomi nelle combinazioni spiega naturalmente subito come i composti differiscano nelle loro proprietà dagli elementi che contengono; a questo modo di vedere si potrebbe tuttavia muovere la seguente obbiezione: per quanto molte proprietà mutino coll'entrare dell'atomo in combinazione, pure ve ne sono altre che persistono, come se l'atomo fosse inalterato anche nei composti. Così hanno carattere addittivo il calore specifico allo stato solido, il potere rifrangente ecc. e sopratutto è notevole come la radioattività permanga inalterata negli atomi combinati. Senonchè la considerazione di quest'ultima proprietà può servire appunto a rispondere ad una tale obbiezione: mentre lo stato di combinazione è enormemente influenzato dalla temperatura, ciò non accade, nei limiti a noi finora accessibili, per la radioattività. In pari tempo le quantità di energia messe in giuoco nelle combinazioni sono enormemente inferiori a quelle inerenti ai fenomeni della radioattività. Si può dunque ammettere che la variazione dell'atomo che noi supponiamo avvenire nella combinazione non interessi quei suoi componenti che determinano le predette proprietà fisiche e dei quali una modificazione comprometterebbe l'esistenza stessa dell'atomo. Volendo ricorrere ad un paragone, si potrebbe ricordare che in certi composti organici alcuni mutamenti di struttura poco modificano le proprietà fisiche e chimiche del composto: così ad es. i corpi a catena aperta ed i corrispondenti aliciclici, come le paraffine e le cicloparaffine. Anche i calori di combustione di certi isomeri sono pressochè identici.

tempi intorno alla possibile struttura degli atomi hanno un grande valore, ma sono ancora lontane dal risolvere il problema. Certo gli studî di J. J. Thomson [1] e di Crehore [2] i tentativi di G. Newton Lewis [3] e massime le meravigliose esperienze e deduzioni di Moseley [4] dimostrano per quale via la soluzione potrà essere tentata [5]. Allo stato attuale delle cose, per rendersi conto dell'indole di queste trasformazioni della struttura interna degli atomi all'atto della combinazione, giova forse ricorrere ad un paragone, inteso naturalmente nelle debite proporzioni, comparandole a certe metamorfosi dei composti organici e segnatamente a quelle che gli indicatori subiscono nella salificazione. In questi casi, come ora si sa, l'indicatore non si salifica tal quale per semplice ionizzazione, ma cambia la sua struttura interna, che viene poi ripristinata quando, per l'operazione inversa, l'indicatore torna allo stato primitivo [6].

[1] Phil. Mag., *26*, 792, 1044; (1914), *27*, 757.

[2] Ibidem, *26*, 25; *29*, 310.

[3] Journ. of the Am. Chem. Soc. (1916), 762.

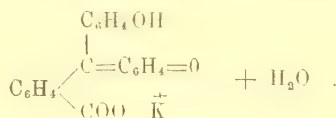
[4] Phil. Mag., *26*, 1624; (1914), *27*, 703.

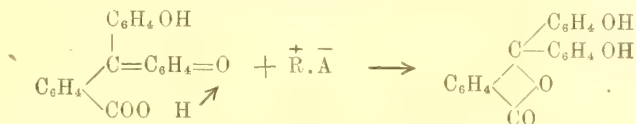
[5] Un buon riassunto su questo argomento è dovuto a W. P. Harkins e E. D. Wilson, Journal of the Am. Chem. Soc. (1915), 1396.

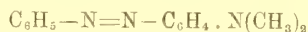
[6] Per bene intendersi, giova ricordare che ad es. la fenolftaleina, incolora, quando la sua molecola viene in contatto con una base $\overset{+}{R}.\overset{-}{OH}$ muta anzitutto la sua struttura interna:

$$\begin{array}{l} \quad C{\diagup}C_6H_4OH \\ \quad C{-}C_6H_4OH \\ C_6H_4\langle\ \rangle O \\ \quad CO \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \quad C_6H_4OH \\ \quad | \\ C_6H_4\langle {C=C_6H_4=O \atop COO\ \overset{+}{H}} \end{array}$$

convertendosi in un acido di colore rosso violetto, il quale poi a sua volta si combina colla base presente salificandosi:

$$\begin{array}{l} \quad C_6H_4OH \\ \quad | \\ C_6H_4\langle {C=C_6H_4=O \atop COO\ \overset{+}{K}} \end{array} + H_2O\ .$$

Quando poi l'aggiunta di un acido $\overset{+}{H}.\overset{-}{A}$ più forte, restituisce la fenolftaleina primitiva, non avviene un semplice doppio scambio, perchè l'acido colorato che si libera, si trasforma per una interna metamorfosi nello pseudo-acido senza colore primitivo;

$$\begin{array}{l} \quad C_6H_4OH \\ \quad | \\ C_6H_4\langle {C=C_6H_4=O \atop COO\ H\nearrow} \end{array} + \overset{+}{R}.\overset{-}{A} \longrightarrow \begin{array}{l} \quad C{\diagup}C_6H_4OH \\ \quad C{-}C_6H_4OH \\ C_6H_4\langle\ \rangle O \\ \quad CO \end{array}\ .$$

E similmente quando il dimetilaminoazobenzolo, che è una base gialla,

$$C_6H_5{-}N{=}N{-}C_6H_4\,.\,N(CH_3)_2$$

si salifica con un acido $\overset{+}{H}.\overset{-}{A}$, la salificazione determina un cambiamento di struttura,

L'espulsione o l'acquisto di un elettrone all'atto della combinazione devono essere accompagnati da una trasformazione interna più o meno profonda dell'atomo: così finalmente si spiega la vera differenza fra l'atomo ed il ione relativo, della quale, per quanto si sia detto e scritto in proposito, la presenza della sola carica non basta a dar ragione. Si può così imaginare benissimo che un atomo (o una molecola) acquisti una carica elettrica senza esser per questo diverso chimicamente da un atomo elettricamente neutro, come ad es. l'aria ionizzata non è chimicamente diversa dall'aria non conduttrice.

L'atomo diventa ione, con perdita o acquisto di energia a seconda la natura delle trasformazioni interne che subisce (indipendentemente dall'idratazione che può accompagnare il fenomeno) e si mantiene tale più o meno stabilmente a misura che il nuovo assetto presenta maggiore o minore stabilità. Questa maggiore o minore stabilità della costituzione interna dell'ione rispetto a quella dell'atomo corrisponde a ciò che vagamente chiamasi intensità di adesione dell'ione alla sua carica. La tendenza più o meno forte dell'atomo di assumere la struttura dell'ione, esprime poi a sua volta ciò che chiamasi tensione di soluzione elettrica degli elementi, che si traduce numericamente nella scala elettrochimica.

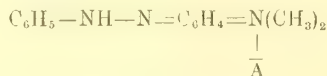
Naturalmente la variazione di struttura dell'atomo che diventa ione, accompagnata, come ammettiamo, da una variazione dell'energia interna, può spiegare l'origine dei calori di ionizzazione e specialmente di quelli positivi, di cui non sembrava facile rendersi ragione.

III.

Intorno alla natura e al significato fisico della valenza sono state fatte le più svariate supposizioni. Colla teoria della dissociazione, quella della valenza è entrata in una nuova fase e la valenza degli atomi apparisce determinata dal numero degli elettroni che essi possono perdere o acquistare secondo le leggi di Faraday. Molti autori hanno contribuito per chiarire questo concetto; fra gli altri J. J. Thomson ha immaginato che le azioni attrattive determinate dalle valenze, non si esercitino in un campo sferico, come tutte le altre, ma solamente nelle direzioni di certi tubi di forza che

---

perchè il composto a tipo chinonico è più stabile, ed il sale non è più azoico, ma chinoide di color rosso:

$$C_6H_5-NH-N=C_6H_4=N(CH_3)_2 \atop \qquad\qquad\qquad\qquad | \atop \qquad\qquad\qquad\qquad \overline{A}$$

L'aggiunta di una base più forte determina la reazione inversa e ripristina il composto azoico giallo.

egli ora considera cilindrici; questi tubi di forza attraverso i quali si eserciterebbero le attrazioni di valenza fra gli atomi, verrebbero quasi a corrispondere alle lineette colle quali i chimici, senza annettervi speciale significato fisico, sogliono indicare le unità di valenza.

Facendo astrazione dalla natura di queste attrazioni, che, come si è detto in precedenza, possono essere di origine diversa, noi crediamo che il numero di affinità di cui un elemento può disporre nelle sue combinazioni dipenda da quello che può chiamarsi forma esterna dell'atomo. A questa conclusione noi siamo arrivati riflettendo sui risultati degli studî dei Bragg. Come si sa, il reticolo cristallografico del diamante [1] è costituito in guisa che ciascun atomo di carbonio apparisce unito ad altri quattro nelle direzioni che vanno dal centro ai vertici di un tetraedro; questo dato di fatto corrisponde in modo così sorprendente alla nota disposizione tetraedrica delle valenze degli atomi di carbonio, a cui i chimici dovettero ricorrere per spiegare certe isomerie dei composti organici, che a noi pare lecito affermare che il carbonio funziona da tetravalente nei suoi composti, perchè il suo atomo assume una forma tetraedrica. Con ciò naturalmente non è detto che anche l'atomo libero debba avere la stessa forma. Noi crediamo che questo concetto o modo di interpretare la valenza degli atomi, possa essere esteso anche agli altri elementi. Facendo questa supposizione si presentano due possibilità: se cioè si deve ammettere che la forma degli atomi sia variabile nei diversi tipi di combinazione, oppure se essa debba ritenersi costante. La questione può essere considerata dal seguente punto di vista. Vi sono elementi che nei diversi tipi di combinazione mantengono in genere lo stesso abito chimico. Così ad es. l'ossido di carbonio, l'acido cianidrico e le carbilammine, il trifenilmetile ed i suoi analoghi più complessi, non differiscono in modo essenziale dai corrispondenti composti di carbonio in cui l'atomo funge da tetravalente. E analogamente può dirsi che i composti ossigenati del cloro hanno, malgrado il diverso contenuto di ossigeno, una veste chimica comune e lo stesso apparisce anche per quelli dell'azoto. Altri elementi invece, col variare del tipo di combinazione, mutano talmente carattere, che si direbbe che nello stesso atomo sono uniti due o più elementi diversi. Così conoscendo solamente i sali rameici, nessuno potrebbe prevedere l'esistenza dei sali rameosi; e quale meraviglia destò giustamente il tallio per la grande differenza che passa fra i composti tallosi e quelli tallici! Non meno diverso carattere hanno poi i derivati del manganese nell'acido man-

[1] Nel reticolo del diamante, secondo le ricerche dei Bragg, non esistono legami doppî e la sua struttura è, per così dire, aliciclica; la grafite e il carbone amorfo, che dànno per ossidazione l'acido mellitico, saranno altrimenti costituiti, a foggia di anelli benzolici condensati. Le diverse forme allotropiche degli altri elementi potranno spiegarsi analogamente.

ganico e permanganico, comparati a quelli dei sali manganosi e così pure quelli del cromo nell'acido cromico e nei sali del sesquiossido.

Considerando questi fatti, apparisce necessario ammettere che in alcuni elementi la forma dell'atomo nei suoi composti possa variare col tipo di combinazione e che però vi siano elementi i di cui atomi sono polimorfi. Mentre in alcuni elementi, come nel carbonio, la valenza diversa non determina cambiamenti di forma dell'atomo, alcune valenze restando semplicemente insoddisfatte, in altri invece ai diversi tipi di combinazione corrispondono forme diverse dell'atomo; così, ad esempio, il rame ha l'atomo dimorfo.

Nei composti cosiddetti di addizione, quando secondo la regola di Werner si formano ioni complessi, gli atomi e le molecole intere che vi prendono parte, vengono a formare, con maggiori o minori mutamenti di energia, e di costituzione interna, nuovi poliedri il cui valore chimico è dato, come si sa, dalla differenza fra la valenza dell'elemento e quella dei gruppi coordinati. Fra i sali doppî e quelli complessi non si può fare una distinzione assoluta, ma soltanto graduale. Non ci sembra poi necessario e neppure opportuno supporre diverse origini delle attrazioni atomiche per spiegare l'esistenza di composti di questo tipo: si potrebbe dire piuttosto che l'affinità ha sempre la stessa origine e che la sua intensità diminuisce man mano che i complessi atomici e molecolari si fanno più grossi; le stereoisomerie werneriane starebbero a dimostrare appunto che le valenze dei complessi sono della stessa natura di quelle degli atomi. Un complesso werneriano potrebbe essere comparato ad un grosso atomo e potrebbe darsi che potesse esistere anche libero come alcuni suppongono per l'ammonio e gli ammoni sostituiti; i composti avalenti (neutroni), come ad esempio il trinitrotriamincobalto $Co\genfrac{}{}{0pt}{}{(NH_3)_3}{(NO_2)_3}$, potrebbero corrispondere agli atomi dei gas indifferenti della serie dell'argo.

Le attuali vedute intorno alla struttura dei cristalli rendono sempre più evidenti le relazioni che devono esistere fra la forma degli atomi e delle molecole e l'isomorfismo. Da quanto precede si comprende subito che certi elementi possono dare diverse serie di derivati isomorfi a seconda il tipo di combinazione; così ad esempio l'atomo del tallio nei composti monovalenti avrà una forma simile a quella dei metalli alcalini nei loro sali, mentre che nei composti trivalenti somiglierà a quella dell'alluminio. La forma di combinazione determina spesso relazioni di isomorfismo fra elementi di carattere diverso perchè i loro atomi sono essi stessi polimorfi.

Per ultimo vogliamo rilevare che alcuni fatti di singolare importanza scoperti recentemente nelle relazioni fra gli elementi radioattivi ed i loro ultimi prodotti di disaggregazione, concordano con le vedute ora esposte: se due o più atomi hanno la stessa struttura e la stessa forma, possono

apparire identici nelle loro manifestazioni anche se la quantità di materia che contengono è leggermente diversa (elementi isotopici) e viceversa, anche contenendo le stesse quantità di materia, se la struttura e la forma sono diverse, due elementi possono essere diversi, malgrado l'identità del peso atomico.

Le proprietà degli elementi non sono soltanto una funzione del loro peso atomico, come credeva Mendelejeff, ma altresì della loro intima struttura.

Matematica. — *Ricerche in analisi estensiva.* Nota della dottoressa Rosaria Giordano, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. In uno spazio ad n dimensioni S_n di Grassmann, siano assegnate s formazioni $A_1, A_2, \dots, A_s$ rispettivamente degli ordini $h_1, h_2, \dots, h_s$, per modo che sia sempre

$$h_j + h_k \geq n + 1 \qquad (j, k = 1, 2, \dots, s); \tag{1}$$

esse avranno in comune una formazione X_ρ dell'ordine

$$\rho = h_1 + h_2 + \cdots + h_s - (s-1)(n+1) \tag{2}$$

che qui vogliamo esprimere per mezzo degli elementi (*punti*) determinativi delle formazioni A. La questione, abbastanza interessante pel maneggio rapido dell'analisi grassmanniana, non venne ancora risoluta con una formula unica che fornisse senz'altro il risultato finale delle successive operazioni: *sezione* di A_1 con A_2, *sezione* del risultato ottenuto con A_3, e così via via fino alla *sezione* del penultimo risultato con A_s.

Anzi, se si pensa che, a voler trattare la questione con l'analisi ordinaria, occorrono s gruppi di $n+1$ espressioni lineari con r termini ciascuna ($r = h_1, h_2, \dots, h_s$) formate con gli r punti che servono di determinazione ad A_r; e che poi occorre cercare (ciò che non è ovvio) per quali valori dei parametri indeterminati di ogni gruppo, le espressioni corrispondenti diventano identiche [2], cosa che, del resto, non venne ancora nemmeno fatta, si vedrà dal risultato che qui presentiamo, ancora una volta, come ogni formula di cui venga ad arricchirsi l'analisi grassmanniana, rappresenti un vero contributo anche al trattamento con la maggiore speditezza delle questioni fondamentali di geometria iperspaziale fatte col tramite di un calcolo.

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1917.

[2] Per vedere a quali difficoltà materiali si va incontro, si può confrontare ad es. pel solo caso di $s = 2$ il § III della Memoria del prof. D'Ovidio: *Le funzioni metriche fondamentali* ecc. (Atti della R. Acc. dei Lincei, 1876-77).

2. Per motivi di opportunità e di generalità, supporremo la formazione A_i come risultante dal prodotto di h_i punti rappresentati coi simboli $i^{(1)}$, $i^{(2)}, \ldots, i^{(h_i)}$, si tratta di esprimere $X_\rho = \prod_{i=1}^{i=s} i^{(h_1)} i^{(h_2)} \ldots i^{(h_i)}$ come *esistente* in (*partecipante* di) qualcuna delle $A_1, A_2, \ldots, A_s$ [1], per es. A_r, con operazioni eseguite sui punti $i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, h_i;\ i = 1, 2, \ldots, s)$.

Poichè ha luogo la (1), le differenze $h_i + h_j - (n+1)$ sono tutte positive o nulle, e tutte non inferiori al numero ρ; e d'altra parte quando si sia posto $h'_i = n + 1 - h_i$ per tutti i valori di i da 1 ad s, si potrà sempre portare A_r ad essere l'ultima dei fattori del prodotto da formare, poichè ciò equivarrà a moltiplicare X_ρ per $(-1)^{\xi_r}$ con

$$(3) \qquad \xi_r = (h'_{r+1} + h'_{r+2} + \cdots + h'_s)\, h'_r = h'_r \sum_{r+1}^{s} h'_i .$$

3. Ciò posto, d'una maniera generica si dicano

$$(4) \qquad l_1\, l_2 \ldots l_{g_i} \quad , \quad l_{g_i+1}\, l_{g_i+2} \ldots l_{h_i}$$

due permutazioni complementari dei numeri $1, 2, \ldots, h_i$, i cui elementi si trovino ordinati come nella permutazione principale, di classi rispettivamente g_i, $h_i - g_i$, e tali che, posto convenzionalmente $g_1 = 0$, sia per tutti i valori di i da 1 ad s,

$$h_i - g_i + g_{i+1} = n + 1 .$$

ovvero

$$(5) \qquad g_{i+1} = n + 1 - h_i + g_i = h'_i + g_i :$$

si avranno, per ogni valore di i, $q_{i-1} = \binom{h_i}{g_i}$ coppie di tali permutazioni; sicchè, indicando con η_{i-1} il numero delle inversioni che gli elementi della $l_1\, l_2 \ldots l_{g_i}$ fanno con quelli della $l_{g_i+1}\, l_{g_i+2} \ldots l_{h_i}$, cioè il numero

$$(6) \qquad \eta_{i-1} = l_1 + l_2 + \cdots + l_{g_i} - \tfrac{1}{2}\, g_i\, (g_i - 1)$$

si hanno nella

$$(7) \qquad A_i = (-1)^{\eta_{i-1}}\, i^{(l_1)}\, i^{(l_2)} \ldots i^{(l_{g_i})} \cdot i^{(l_{g_i+1})}\, i^{(l_{g_i+2})} \ldots i^{(l_{h_i})}$$

q_{i-1} espressioni diverse della formazione A_i, anche per $i = 1$ se, insieme alla convenzione $g_1 = 0$, si ritiene l'altra $\eta_0 = 0$ (ciò che porta per q_0 il valore 1).

[1] Qualche cosa, come si vede, di analogo al noto principio di trasporto, del quale il prof. Del Re già fece diverse applicazioni [cfr. ad es. i suoi lavori: *Sopra alcune formule fondamentali nell'analisi spaz. ad n dimensioni di Grassmann* (Rend. Acc. Napoli, 1911); *Formule per trasformare con omografie estensive formazioni d'ordine qualunque* (ibid., 1916)].

4. Ne segue che se noi, per esprimere d'una maniera concisa, il prodotto degli elementi della formazione A_i corrispondenti alla permutazione $l_{g_i+1}\, l_{g_i+2} \dots l_{h_i}$ per gli elementi della formazione A_j $(j > i)$ corrispondenti alla permutazione $l_1\, l_2 \dots l_{g_j}$, con

$$(8) \qquad h_i - g_i + g_j = n + 1$$

scriviamo $P_{g_j}(i, j)$, dove, tenuti fissi i, j, il simbolo ha tanti valori quanti ne indica il prodotto $q_{i-1}\, q_{j-1} = \binom{h_i}{g_i}\binom{h_j}{g_j}$ perchè tanti sono i modi in cui $h_i - g_i$ elementi di A_i possono farsi seguire da g_j elementi di A_j, si potranno, in una maniera altrettanto concisa scrivere i prodotti $A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$, ..., ed avere:

$$A_1 A_2 = \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \,.\, 2^{(l_{g_2+1})}\, 2^{(l_{g_2+2})} \dots 2^{(l_{h_2})},$$

$$A_1 A_2 A_3 =$$

$$= \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \sum_{q_2} (-1)^{\eta_2} P_{g_3}(2, 3) \,.\, 3^{(l_{g_3+1})}\, 3^{(l_{g_3+2})} \dots 3^{(l_{h_3})}, \dots;$$

ovvero, d'una maniera generale,

$$(9) \quad X_\rho = \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \sum_{q_2} \dots \sum_{q_{s-1}} (-1)^{\eta_{s-1}} \times$$

$$\times P_{g_s}(s-1, s) \,.\, s^{(l_{g_s+1})}\, s^{(l_{g_s+2})} \dots s^{(l_{h_s})}.$$

Ma questa forma di scrittura che, quantunque al seguito del simbolo introdotto riesce ad abbreviare di molto l'espressione del prodotto $A_1 A_2 \dots A_s$, è ancora lunga perchè possa, senza perdere in chiarezza e semplicità, prestarsi a dare il prodotto stesso nella forma, in cui A_r sia in ultimo posto, e tanto meno nella forma quale risulterebbe dal prendere per le $A_1, A_2, \dots, A_s$ una loro permutazione qualunque fra le $s!$ possibili. Ad ovviare un tale inconveniente, ho trovato opportuno introdurre un nuovo simbolo, col chiamare

$$E(1, 2, \dots, r-1, r+1 \dots s)$$

l'espressione essenzialmente numerica:

$$(10) \qquad \sum_{q_1} (-1)^{\eta_1} P_{g_2}(1, 2) \sum_{q_2} (-1)^{\eta_2} P_{g_3}(2, 3) \dots \sum_{q_{r-1}} (-1)^{\eta_{r-1}} \times$$

$$\times P_{g_{r+1}}(r-1, r+1) \sum_{q_{r+1}} \dots \sum_{q_{s-1}} (-1)^{\eta_{s-1}} P_{g_s}(s-1, s)$$

nella quale i sommatorii, a cominciare da dritta, hanno rispettivamente le estensioni date dai relativi indici inferiori.

Con ciò il prodotto $A_1\, A_2 \dots A_s$ si presenta allora nella forma

$$
(11) \qquad A_1\, A_2 \dots A_s = (-1)^{\xi_r} E(1\,,2\,,\dots,r-1\,,r+1\,,\dots,s) \times
$$

$$
\times \sum_{q_r} (-1)^{\eta_r}\, P_{q_r}(s\,,r)\,.\, r^{(l_{g_r+1})}\, r^{(l_{g_r+2})} \dots r^{(l_{h_r})}
$$

valida, e con significato ben determinato, per tutti i valori di r da 1 ad s.

5. Per rendersi conto del valore numerico che ha la (10) e quindi del valore effettivo che compete al simbolo $E(1\,,2\,,\dots,r-1\,,r+1\,,\dots,s)$, basta cercare il valore numerico che è rappresentato dal simbolo $P_{g_j}(i\,,j)$; ora è ovvio trovare questo valore numerico. In fatti, se le coordinate rispetto ad una piramide $e_1\, e_2 \dots e_{n+1}$ di elementi unitarii indipendenti dell'elemento $i^{(x)}$ della formazione A_i vengono dette

$$
(12) \qquad i_{x,1}\,,\ i_{x,2}\,,\dots,\ i_{x,n+1} \qquad (x = 1\,,2\,,\dots,h_i)
$$

e quelli dell'elemento $j^{(y)}$ della formazione A_j le diciamo

$$
(13) \qquad j_{y,1}\,,\ j_{y,2}\,,\dots,\ j_{y,n+1} \qquad (y = 1\,,2\,,\dots,h_j)
$$

si trova essere

$$
(14) \qquad P_{g_j}(i\,,j) = \begin{vmatrix}
i_{g_i+1,1} & i_{g_i+1,2} & \dots & i_{g_i+1,n+1} \\
i_{g_i+2,1} & i_{g_i+2,2} & \dots & i_{g_i+2,n+1} \\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
i_{h_i,1} & i_{h_i,2} & \dots & i_{h_i,n+1} \\
j_{1,1} & j_{1,2} & \dots & j_{1,n+1} \\
j_{2,1} & j_{2,2} & \dots & j_{2,n+1} \\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
j_{g_j,1} & j_{g_j,2} & \dots & j_{g_j,n+1}
\end{vmatrix},
$$

dove circa g_i e g_j regge la (8).

6. Analogamente alle (12), (13) indicando con

$$
r_{z,1}\,,\ r_{z,2}\,,\dots,\ r_{z,n+1} \qquad (z = 1\,,2\,,\dots,h_r)
$$

le coordinate dell'elemento $r^{(z)}$ rispetto alla $e_1\, e_2 \dots e_{n+1}$, si trovano, dalla espressione (11) del prodotto $A_1\, A_2 \dots A_s$ come *coordinate* di questo pro-

dotto considerato nella formazione A_r e rispetto alla piramide $r^{(1)}\, r^{(2)} \dots r^{(h_r)}$ di A_r, i numeri che si hanno dalla

$$(-1)^{\xi_r} E(1.2, \dots, r-1, r+1, \dots, s) \times$$
$$\times \sum_{q_r} (-1)^{\eta_r} P_{g_r}(s, r) \begin{vmatrix} r_{l_{g_r+1,1}} & r_{l_{g_r+1,2}} & \dots & r_{l_{g_r+1,n+1}} \\ r_{l_{g_r+2,1}} & r_{l_{g_r+2,2}} & \dots & r_{l_{g_r+2,n+1}} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_{l_{h_r,1}} & r_{l_{h_r,2}} & \dots & r_{l_{h_r,n+1}} \end{vmatrix}$$

quando nel $\sum$ si considerano quei determinanti che nelle varie matrici figuranti a dritta [matrici, sia detto per ricordo, corrispondenti alle varie permutazioni di classe $h_r - g_r$ giusta le (4) per $i = r$] occupano eguale posto.

Al mio illustre maestro prof. A. Del Re, per l'indicazione del soggetto e pei suoi frequenti consigli che mi resero possibile trattarlo in una maniera così *economica* ed *elegante* nella forma, e così *ricca di contenuto*, devo qui significare i miei sentimenti della più viva gratitudine e riconoscenza.

Matematica. — *Il rango di una matrice di Riemann.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo [1].

Per determinare in modo preciso le funzioni abeliane non singolari a moltiplicazione complessa [2] ho avuto bisogno di approfondire in qualche punto la teoria generale delle matrici di Riemann; nel tempo stesso mi è stato necessario ricorrere a un ordine di considerazioni che mi ha condotto a riconoscere e poi a sfruttare largamente un legame assai intimo fra codesta teoria e quella delle algebre associative [3] a un numero qualunque di unità.

Rimandando le dimostrazioni a una Memoria un po' ampia che sarà pubblicata altrove, raccolgo qui gli enunciati dei nuovi teoremi a cui sono pervenuto, alcuni dei quali sembrano singolarmente semplici ed eleganti.

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1917.

(2) Vedi su questo proposito la Nota preventiva presentata in questi stessi giorni all'Accademia di Parigi: *Les fonctions abéliennes non singulières à multiplication complexe.*

(3) Per brevità di discorso, qui e nel seguito, sull'esempio dei matematici inglesi e nord-americani, dico algebra a più unità ciò che altri direbbe sistema di numeri ipercomplessi o di numeri complessi a più unità. E poichè nel caso nostro non vi è luogo a considerare algebre non associative, nel testo si dirà brevemente algebra invece di algebra associativa.

In essi gioca in modo essenziale la nozione di *rango* di una matrice riemanniana che qui per la prima volta viene definita e utilizzata; e che è dedotta appunto — il nome stesso lo dice — da una nozione fondamentale e ben nota delle algebre a più unità.

Sorge così un nuovo carattere (intero) delle matrici riemanniane, invariante di fronte alla relazione di (equivalenza o, più in generale, di) isomorfismo, che sembra non meno notevole di quelli già introdotti nei miei lavori precedenti.

1. Sia ω una matrice riemanniana di genere p, con gli indici di singolarità e moltiplicabilità k e h, e sia $[\omega]$ l'insieme di tutte le matrici quadrate d'ordine $2p$, a elementi razionali, rispondenti alle omografie riemanniane di ω.

Poichè queste omografie stanno tutte in un sistema lineare ∞^h e formano un gruppo, segue subito che:

L'insieme $[\omega]$ *può considerarsi come un'algebra ad* $h+1$ *unità nel corpo dei numeri razionali. Essa è dotata di modulo, e questo è fornito dalla matrice identica d'ordine* $2p$.

2. Come è noto, un'algebra si dice *primitiva* se un prodotto di suoi elementi è nullo quando e solo quando è nullo uno (almeno) dei suoi fattori.

Un elemento di un'algebra si dice *pseudo-nullo* se non è nullo, ma è nulla qualche sua potenza; e un'algebra si dice *pseudo-nulla*, se ogni suo elemento non nullo è pseudo-nullo.

Una *sotto-algebra* B di un'algebra A si dice *invariante* (in A) se contiene i prodotti di ogni suo elemento per un elemento qualunque di A, qualsiasi l'ordine in cui tal prodotto viene effettuato.

Un'algebra si dice *semi-semplice* se non contiene sotto-algebre invarianti pseudo-nulle; *semplice* se non contiene alcuna sotto-algebra invariante.

Un'algebra C è la *somma diretta* di due altre algebre A e B, se ogni elemento di C è la somma di un elemento di A con un elemento di B, e il prodotto di due elementi qualsiansi, scelti l'uno in A e l'altro in B, è nullo qualunque sia l'ordine in cui viene effettuato.

Quando un'algebra può esser considerata come la somma diretta di due altre, essa si dice anche *riducibile*.

3. Ciò posto, le proprietà fondamentali dell'algebra $[\omega]$ connessa con la matrice ω sono fornite dai seguenti teoremi:

L'algebra $[\omega]$ *è semi-semplice qualunque sia la matrice* ω; *è semplice se (e soltanto se) la matrice* ω *non ammette assi isolati: è primitiva se (e soltanto se) la matrice* ω *è pura.*

Inoltre:

L'algebra $[\omega]$ *è riducibile quando e solo quando* ω *ammette assi isolati; e possiede elementi pseudo-nulli quando e solo quando* ω *è impura e possiede infiniti assi distinti.*

4. Sia A un elemento non nullo di $[\omega]$ ed A^* la corrispondente omografia riemanniana di ω; sia infine I il modulo di $[\omega]$, cioè la matrice identica d'ordine $2p$.

Diremo *rango*, tanto di A quanto di A^*, il minimo intero positivo m per cui accade che gli elementi

$$I \,,\, A \,,\, A^2 \,,\dots,\, A^{m-1} \,,\, A^m$$

di $[\omega]$ siano (linearmente dipendenti secondo numeri razionali, e quindi senz'altro, trattandosi di matrici ad elementi razionali) linearmente dipendenti.

Al variare di A entro $[\omega]$ l'intero m non resta in generale costante; ma esso ammette in ogni caso un massimo finito ϱ, il così detto rango di $[\omega]$, che verrà detto il *rango* della matrice ω.

Codesto carattere di ω, invariante di fronte alle relazioni di equivalenza e di isomorfismo, è soggetto evidentemente alle seguenti diseguaglianze:

$$\varrho \geq 1 \quad , \quad \varrho \leq h+1 \quad , \quad \varrho \leq 2p \, ;$$

ed:

È $\varrho = 1$ *quando e solo quando è* $h = 0$ (*e quindi anche* $k = 0$).

A titolo di esemplificazione giova osservare che:

Una matrice riemanniana ellittica è del rango 1 *o* 2 *secondo che per essa l'indice di moltiplicabilità è* 0 *o* 1;

che:

Una matrice riemanniana del genere 2 *è del rango* 1, 2, 3 *o* 4 *secondo che* (*adoperando una classificazione adottata nella mia Memoria inserita nel vol. 41 dei Rendiconti di Palermo*) *essa è*

α) *del tipo* I); *oppure*

β) *del tipo* II), III), VII) *e* VIII); *oppure*

γ) *del tipo* IV); *oppure, infine,*

δ) *del tipo* V), VI) *o* IX);

e che:

Una matrice riemanniana impura del genere p priva di assi isolati i cui assi puri siano tutti ellittici è del rango p o 2p secondo che non è od è ad indici massimi.

5. In alcuni degli esempî precedenti, che potrebbero essere facilmente moltiplicati, si hanno altrettante conferme delle seguenti proposizioni fondamentali:

Se la matrice ω *è composta con due o più altre matrici riemanniane, il rango di* ω *è la somma dei ranghi di queste*;

e:

Se la matrice ω *è priva di assi isolati, il suo rango* ϱ *è un divisore comune di* $h+1$ *e* $2p$.

Si ha inoltre che:

Se la matrice ω è priva di assi isolati, la sua omografia riemanniana generica è generale e i suoi spazi fondamentali sono tutti della stessa dimensione. Inoltre se questa dimensione è ν, si ha:

$$(\nu + 1)\,\varrho = 2p\,.$$

Se la matrice ω è pura, il teorema è suscettibile di una determinazione assai maggiore; può dirsi infatti che:

Se la matrice ω è pura, ogni sua omografia riemanniana è generale. Gli spazi fondamentali di una tale omografia hanno tutti la stessa dimensione; e se ν è la dimensione comune degli spazi fondamentali di un'omografia sì fatta non nulla e di rango m, si ha:

$$(\nu + 1)\, m = 2p \text{ (1)}.$$

6. Una conseguenza assai notevole di queste proposizioni, poste a riscontro coi teoremi del n.° 7, è quella riguardante l'indice di moltiplicabilità di una matrice pura il cui genere sia un numero primo.

Precisamente si ha che:

L'indice di moltiplicabilità di una matrice riemanniana pura del genere p, se p è un numero primo, non può essere che 0, 1, $p - 1$ o $2p - 1$.

In particolare:

Il numero base di Hurwitz di una curva di genere p, priva di sistemi regolari di integrali riducibili, nell'ipotesi che p sia un numero primo, non può essere che 1, 2, p o $2p$ (2).

7. Se la matrice ω non è singolare, ogni sua omografia riemanniana non nulla è necessariamente principale.

Si vede inoltre che una tale omografia, ove non sia identica, ha due soli spazi fondamentali di dimensione $p - 1$, e quindi:

(1) Avendo avuto occasione verso la fine di agosto u. s. di comunicare al Rosati questo teorema, egli mi ha risposto di averne già osservata la prima parte in un lavoro che sarà presentato nel prossimo novembre all'Accademia delle Scienze di Torino e il cui manoscritto è stato spedito al prof. Segre fin dal mese di luglio. In questo egli si occupa di corrispondenze situate su curve algebriche e quindi, in sostanza, di matrici riemanniane legate a curve; ma la proprietà in discorso è di natura generale, e tale è pure la dimostrazione del Rosati che coincide con quella mia.

Anche il fatto algebrico rispondente alla seconda parte del teorema è stato rilevato dal Rosati sebbene, com'egli mi ha scritto, non abbia avuto occasione di interpretarlo geometricamente e di valersene in codesto suo lavoro.

(2) Se $p = 2$, questi quattro valori si riducono a tre e si ritrova un risultato dovuto al Rosati. Vedi la sua Memoria: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Annali di Matematica pura e dapplicata, serie 3ª, vol. XXV (1915), pp. 1-32].

Una matrice riemanniana non singolare o è del rango 1 *o è del rango* 2.

In base a questa proposizione, poichè le matrici di rango 1 sono quelle a indici nulli, la classificazione delle matrici di Riemann non singolari rientra, sostanzialmente, in quella delle matrici di Riemann a rango 2.

Ebbene, quest'ultima è fornita dal seguente notevole teorema:

Le matrici riemanniane di rango 2 *sono tutte e sole le matrici di Riemann per cui gli indici di singolarità e moltiplicabilità* k *e* h *sono dati da:*

I) $k=0$ *e* $h=1$;

II) $k=0$ *e* $h=3$;

III) $k=1$ *e* $h=1$; *o infine da*

IV) $k=2$ *e* $h=3$.

Quelle per cui valgono le alternative I) *e* II) *sono certo pure e col genere diverso da* 2; *quelle per cui valgono le alternative* III) *e* IV) *possono essere pure od impure e quindi le matrici in discorso si distribuiscono in sei tipi distinti.*

Infine il caso IV) *non può verificarsi che per matrici di genere pari, e il caso* II) *non può verificarsi che per matrici di genere pari e maggiore di* 2.

A complemento di questo teorema giova osservare che:

Se una matrice di Riemann del rango 2 *ha per genere* p, *gli spazi fondamentali delle sue omografie riemanniane (non nulle e non identiche) sono due* S_{p-1} *fissi, imaginari coniugati o reali secondo che essa presenta l'aspetto* I) *o l'aspetto* III); *sono invece gli* S_{p-1} *di una* V_p^p *razionale normale reale di Segre priva affatto di punti reali o dotata di infiniti punti reali secondo che la matrice presenta l'aspetto* II) *o* IV).

Un'immediata conseguenza della penultima proposizione enunciata è la seguente:

Le curve algebriche, tali che il grado dell'equazione minima della corrispondenza algebrica generica situata sopra una qualunque di esse sia 2, *sono tutte e sole quelle curve algebriche per cui i numeri base* μ, μ_1 *e* μ_2 $(\mu=\mu_1+\mu_2)$ *di Hurwitz e di Rosati, cioè i numeri base di tutte le corrispondenze algebriche situate sulla curva, di quelle simmetriche o di quelle emisimmetriche, sono dati da*

I) $\mu=2$, $\mu_1=1$, $\mu_2=1$;

II) $\mu=4$, $\mu_1=1$, $\mu_2=3$;

III) $\mu=2$, $\mu_1=2$, $\mu_2=0$;

IV) $\mu=4$, $\mu_1=3$, $\mu_2=1$.

8. Prima di chiudere questo rapido riassunto, non voglio omettere di fare un'osservazione che per qualche quistione può riuscire non del tutto inutile.

Ho già avuto occasione di far rilevare come spesso, per passare dal discontinuo al continuo, convenga considerare *tutte le omografie* di una matrice di Riemann, anzi che le sole omografie riemanniane.

Ove ciò si faccia per la nostra matrice ω, si è costretti a introdurre per essa, oltre l'algebra $[\omega]$, due algebre ulteriori $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ che hanno con le sole omografie *reali* o con tutte le omografie di ω la stessa relazione che l'algebra $[\omega]$ ha con le sue omografie riemanniane.

Le algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ sono definite, rispettivamente, nel corpo dei numeri reali e in quello dei numeri complessi ordinarî e possono riguardarsi, adoperando una frase molto suggestiva del Cartan, come due *prolungamenti* successivi dell'algebra $[\omega]$.

I ranghi di $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ eguagliano entrambi quello di $[\omega]$ cioè di ω; ed un importante teorema dello Wedderburn, assicura subito, grazie a una proposizione enunciata più sopra nel n. 3, che anche $[\omega]'$ ed $[\omega]''$ sono, al pari di $[\omega]$, semisemplici qualunque sia la matrice ω.

È chiaro, poi, che $[\omega]''$ è primitiva quando e solo quando ω è ad indici nulli, e risulta infine dalle cose dette che $[\omega]'$ è primitiva quando e solo quando ω non è singolare.

Ma su questo mi propongo di ritornare più minutamente se il seguito delle ricerche consiglierà di approfondire lo studio delle algebre $[\omega]'$ ed $[\omega]''$.

Cinetica chimica. — *Studî di cinetica chimica* [1]. Nota di U. Pratolongo [2].

Gli svolgimenti chimico-cinetici, sia di carattere termodinamico (van 't Hoff, Arrhenius, Trautz) che di carattere dinamico-molecolare (Jäger, Goldschmidt, Berthoud) ebbero sinora carattere prevalentemente induttivo.

L'esame critico del problema aveva già ripetutamente indicato che la soluzione di essa non poteva scendere che da una termodinamica generale, che, a differenza della termodinamica classica, comprendesse tutti i termini del problema; guidato da una felice intuizione, R. Marcelin [3] ha per la

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore di agricoltura di Milano.

[2] Riassunto di un lavoro pubblicato integralmente nel Journal de Chimie Physique, vol. 15, 1917 (v. la relazione della Commissione esaminatrice in questi Rendiconti, vol. 26, I, pag. 623).

[3] *Contribution à l'étude de la cinétique physico-chimique*, Thèse, Paris, 1914. In questo lavoro sono raccolte e svolte le idee che l'autore aveva precedentemente accen-

prima volta dimostrato che una soluzione soddisfacente del problema può esser tratta dalla meccanica statistica gibbsiana.

1. L'intera costruzione chimico-cinetica può essere eretta, con metodo deduttivo, dal seguente postulato chimico-cinetico fondamentale:

In un sistema chimico le molecole che reagiscono ad ogni istante sono quelle la cui energia, espressa in coordinate generalizzate, ha raggiunto un valore determinato. A tale valore R. Marcelin ha dato il nome di *energia critica del sistema.*

In un insieme di N sistemi, la distribuzione energetica dei quali risponda alle leggi della distribuzione canonica definita dal Gibbs [1], il numero dei sistemi la cui energia supera il valore critico ε è dato, serbando immutati i simboli gibbsiani, dall'espressione

$$N e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\theta} + \varphi}.$$

Riferita ad un sistema chimico, nel quale si svolge una reazione, l'espressione stessa regge, secondo il postulato chimico-cinetico fondamentale testè enunciato, la velocità di reazione ad ogni istante.

Se la reazione è di primo grado, se il processo chimico elementare si svolge cioè con velocità proporzionale alla concentazione

$$-\frac{dC}{dt} = k\,C$$

la velocità di reazione nel sistema considerato, definita dal coefficiente k, sarà

$$k = e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\theta} + \varphi}.$$

Se la reazione è di grado superiore al primo, in genere di grado n, se la velocità del processo chimico elementare segue cioè la relazione

$$-\frac{dC}{dt} = k\,C^n$$

---

nate in diverse pubblicazioni, v. C. R., vol. *151*, pp. 1052-1055 (1910); vol. *157*, pp. 1419-1422 (1913); vol. *158*, pp. 116-18, 407-409 (1914); Journal de Chimie Physique, *9*, pp. 339-415 (1911); *12*, 451-60 (1914).

[1] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, New Haven, 1914. La prima pubblicazione risale al 1902.

lo svolgimento della reazione sarà retto dall'espressione

$$k = e^{n\left(\frac{\psi - \varepsilon}{\theta} + \varphi\right)}$$

che ripete, dal punto di vista formale, la relazione precedente.

Considerate le relazioni che nella meccanica gibbsiana legano il modulo θ, le funzioni ψ e φ rispettivamente alla *temperatura*, all'*energia media* e all'*entropia* del sistema e limitate per ora le nostre considerazioni ai sistemi pei quali tale rispondenza è verificata almeno in modo approssimato, non è difficile scorgere che la relazione chimica cinetica testè stabilita non differisce essenzialmente, comprende anzi le note relazioni chimico-cinetiche di carattere induttivo.

Riesce non meno facile avvicinare la relazione stessa alla nota relazione chimico-cinetica di van 't Hoff, nella sua forma più completa, che nella letteratura chimica è nota dal nome di Kooij

$$\log k = -\frac{A}{T} + B \log T + C .$$

Se difatti nella relazione chimico-cinetica testè stabilita si fa corrispondere il modulo θ alla temperatura, la funzione ψ all'energia media molecolare e la funzione φ all'entropia, se si assume che ψ varii linearmente con la temperatura, secondo l'espressione

$$\psi_\theta = \psi_0 + C\theta ,$$

dove C rappresenta evidentemente il calore specifico del sistema, e che all'espressione di φ in funzione della temperatura possa essere stata data la forma generale

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\theta}\frac{dQ}{d\theta} ,$$

dove $\frac{dQ}{d\theta}$ rappresenta ancora il calore specifico C del sistema, si giunge supponendo in un primo grado di approssimazione $\frac{dQ}{d\theta}$ indipendente dalla temperatura, all'espressione

$$\log k = \frac{\psi_0 - \varepsilon}{\theta} + C \log \theta + (C + \varphi_1) ,$$

dove φ_1 rappresenta l'entropia del sistema per $\theta = 1$, ψ_0, C ed ε sono costanti proprie del sistema considerato.

L'analogia formale fra questa relazione e quella precedentemente scritta di carattere induttivo (Kooij) non ha bisogno d'essere illustrata.

Se il termine $C \log \theta$ è piccolo di fronte a $\frac{\psi_0 - \varepsilon}{\theta}$, ciò che approssimativamente è verificato per le reazioni, che si svolgono a temperatura vicina all'ordinaria, l'espressione precedente può allora essere trascritta nella forma

$$\log k = \frac{\psi_0 - \varepsilon}{\theta} + \text{cost}\,,$$

nella quale forma ripete la relazione chimica-cinetica di van 't Hoff-Arrhenius nella sua forma più semplice

$$\log k = -\frac{A}{T} + \text{cost.}$$

Derivata rispetto a θ l'espressione stessa diventa

$$\frac{d \log k}{d\theta} = -\frac{\psi_0 - \varepsilon}{\theta^2}$$

e riproduce in tale forma l'espressione, cui è giunto R. Marcelin attraverso ad una laboriosa analisi e che definisce per la prima volta una relazione, accessibile all'esperienza, fra il coefficiente logaritmico di temperatura, la energia molecolare media e l'energia critica.

La differenza $\psi_0 - \varepsilon$, essenzialmente negativa, è stata designata da R. Marcelin col nome di *energia critica relativa* ed esprime evidentemente la quantità d'energia, che dev'essere fornita ad una molecola, presa allo stato medio per renderla atta a reagire.

Se del sistema chimico così definito si dà una rappresentazione spaziale riesce agevole scorgere che il valore dell'energia critica definita dal postulato chimico-cinetico fondamentale è comune alle due reazioni antagoniste, che si svolgono nello stesso sistema.

Tra le relazioni di carattere applicativo che possono esser tratte dalla relazione chimica-cinetica fondamentale merita speciale rilievo quella che lega l'energia critica relativa della reazione $\psi_0 - \varepsilon$, la temperatura θ e il coefficiente di temperatura della velocità di reazione, che viene solitamente designato col simbolo Γ. Tale relazione, ove si indichino con k_1 e k_2 i coefficienti di velocità di reazione rispettivamente alle temperature θ_1 e θ_2, k assume la forma

$$\Gamma = \frac{k_1}{k_2} = e^{\frac{(\psi_0 - \varepsilon)(\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1 \theta_2}},$$

nella quale si pone solitamente

$$\theta_1 - \theta_2 = 10 .$$

È chiaro che per θ crescente da zero per valori positivi, $\boldsymbol{\Gamma}$ assume valori grandissimi e via via decrescenti sino al valore *uno* cui tendono asintoticamente.

La relazione testè scritta consente di calcolare agevolmente il valore dell'*energia critica relativa* di una relazione quando sia noto il valore del coefficiente di temperatura della velocità della reazione stessa.

Lo studio sperimentale delle reazioni chimiche dal punto di vista chimico-cinetico consente di determinare il valore dell'energia critica relativa proprio di ogni reazione e delle altre costanti chimico-cinetiche caratteristiche.

Se, traendo profitto dal copioso materiale sperimentale sino ad oggi raccolto in quel campo, si calcolano i valori dell'energia critica relativa delle reazioni sino ad oggi studiate dal punto di vista cinetico [1], si giunge ad una serie di importanti rilievi, che possono brevemente essere riassunti come segue:

Se si eccettuano le reazioni d'inattivazione termica delle tossine e degli enzimi, che presentano valori dell'energia critica relativa eccezionalmente elevati, i più alti valori dell'energia critica relativa sono proprii delle reazioni gassose che si svolgono a temperatura elevata.

Alle reazioni « gassose » che si svolgono in seno ad un solvente o in presenza di un catalizzatore o per azione fotochimica corrisponde sempre un valore dell'energia critica relativa meno elevato, sebbene variabile entro limiti assai lati.

I valori più bassi della variabile in istudio sono dati dalle reazioni catalitiche, soprattutto dalle reazioni enzimatiche e fotochimiche; una serie di reazioni fotochimiche ha anzi energia critica relativa nulla o pressochè nulla.

Questo andamento generale dei valori dell'energia critica relativa col mutare della natura della reazione riesce anche più strettamente precisato pei casi in cui una *stessa reazione* può compiersi in due o più « modi » diversi.

Nel prospetto che segue sono raccolti alcuni dati maggiormente dimostrativi al riguardo.

[1] Nel lavoro integrale già citato e al quale è forza rimandare qui per maggiori dettagli, sono raccolti i dati chimico-cinetici di oltre un centinaio di reazioni chimiche.

	Valori dell'energia critica relativa
1. *Reazione di scomposizione dell'acqua ossigenata.*	
Senza catalizzatore (Lemoine)	9·100
Catalizzatore: *ioni J'* (Walton)	6·864
Platino colloidale (Bredig)	5·900
Catalasi (Senter)	3·050
2. *Idrolisi del maltosio.*	
Catalizzatore: *ioni H•* (Sigmond)	17·130
maltasi (Lintner e Kröber)	2·900
3. *Idrolisi del saccarosio*	
Catalizzatore: *ioni H•* (Spohr, Vrech)	12·800
invertasi (Kjeldahl)	4·600
4. *Ossidazione dell'acido iodidrico in soluzione acquosa* (Plotnikov)	
Reazione oscura	9·100
Reazione fotochimica	3·100

2. Dalle relazioni chimico-cinetiche testè stabilite possono essere svolte, seguendo un cammino inverso di quello già seguito da van 't Hoff, le equazioni fondamentali della statica chimica.

Se si indicano con ψ_1 e ψ_2, φ_1 e φ_2 i valori delle funzioni gibbsiane ψ e φ rispettivamente dei due sistemi chimici antagonisti in equilibrio chimico, con θ e con ε i valori comuni della temperatura e dell'energia critica, la condizione d'equilibrio, definito dall'eguaglianza di velocità delle due reazioni antagoniste, è data, indicando con K la costante d'equilibrio, dalla relazione

$$\log K = \log \frac{k_1}{k_2} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\theta} + \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Da un punto di vista generale e considerando in un primo grado d'approssimazione i calori specifici dei due sistemi indipendenti dalla temperatura (v. pag. 184), e ponendo

$$-U = \psi_1 - \psi_2$$

la relazione stessa assume la forma

$$\log K = -\frac{U}{\theta} + (C_1 - C_2) \log \theta + \text{cost.}$$

Si giunge così ad una « isocora di reazione » che ripete ne' suoi termini essenziali la nota isocora che W. Nernst ha tratto dal teorema termico, che da lui prende il nome.

Quando il termine $(C_1 - C_2) \log \theta$ sia piccolo di fronte ad $\frac{U}{\theta}$, l'isocora stessa si converte nella relazione approssimata

$$\log K = -\frac{U}{\theta} + \text{cost.}$$

che non differisce dall'isocora termodinamica di van 't Hoff.

Per le reazioni in cui $log K$, che rappresenta l'energia libera della reazione, è piccolo di fronte a U, si ha manifestamente

$$\frac{U}{\theta} = (C_1 - C_2) \log \theta + \text{cost} ,$$

relazione che non differisce dalla regola di Trouton e dalla regola di Le-Chatelier-Forcrand, nella forma « corretta » in base al teorema di Nernst, e che si muta nelle regole di Trouton e di Le-Chatelier-Forcrand quando $(C_1 - C_2) \log \theta$ sia piccolo di fronte ad U.

3. Le relazioni chimico-cinetiche fondamentali

$$k_1 = e^{\frac{\psi_1 - \varepsilon}{\theta} + \varphi_1}$$

$$k_2 = e^{\frac{\psi_2 - \varepsilon}{\theta} + \varphi_2}$$

e la relazione statica, che ne deriva,

$$K = e^{\frac{\psi_1 - \psi_2}{\theta} + \varphi_1 - \varphi_2}$$

definiscono un sistema chimico in modo che, noti i valori di ψ_1, ψ_2, φ_1 e φ_2, possono essere calcolati i valori di k_1, k_2 e K, e per converso, noti i valori di k_1, k_2, K, $\psi_1 - \psi_2 = - U$, e $\varphi_1 - \varphi_2$, e di $\psi - \varepsilon$, accessibili sperimentalmente, si possono calcolare i valori di ψ_1, ψ_2, di φ_1 e di φ_2.

Come è facile scorgere, le relazioni così definite offrono la possibilità di risolvere in modo soddisfacente alcuni problemi già a lungo investigati e discussi della dinamica chimica; i problemi che si riferiscono alla natura dei *fenomeni catalitici*, dei *fenomeni fotochimici* e delle *influenze mediali*.

Appare infatti da tali relazioni che ogni variazione del coefficiente k di velocità e della costante K di equilibrio di una reazione, dovuta ad una *azione acceleratrice* — catalitica, fotochimica o mediale — potrà essere ricondotta ad una variazione dell'energia media ψ o dell'energia critica ε.

Tenuto conto delle semplificazioni, che nelle relazioni stesse possono essere introdotte in linea approssimata, appare chiaramente la possibilità di dare al problema in ogni caso una soluzione sperimentale.

Il risultato cui si giunge per tale via e che risolve il problema proposto della natura dei fenomeni catalitici, fotochimici e mediali, può esser brevemente riassunto nel modo seguente.

Nella serie di azioni cataliliche, fotochimiche e mediali, che non involgono variazione alcuna dello stato di equilibrio finale della reazione, la va-

riazione di velocità è legata unicamente ad una variazione dell'energia critica ε delle due reazioni antagoniste e procede manifestamente dal compiersi di una reazione intermedia fra il catalizzatore ed il reagente. Tali azioni possono essere designate, per brevità, come *azioni catalitiche di prima specie.*

La serie delle azioni catalitiche, fotochimiche e mediali, che involgono una variazione dello stato finale della reazione, devono manifestamente essere ricondotte, oltre che ad un'eventuale variazione dell'energia critica ε, che rimane peraltro senza effetto sullo stato d'equilibrio della reazione, ad una variazione dell'energia molecolare media ψ. Tali azioni implicano evidentemente uno scambio d'energia fra il catalizzatore e il sistema catalizzato, fra il solvente e il sistema chimico disciolto, fra la radiazione luminosa e la reazione, che si svolge sotto la sua azione, e non rientrano perciò nella concezione classica dei fenomeni catalitici; indichiamo qui tali azioni col nome di *azioni catalitiche di seconda specie.*

La dottrina dei fenomeni catalitici, fotochimici e mediali, che riesce così delineata, consente di dare una rappresentazione soddisfacente ad una serie di interessanti fenomeni, appartenenti sia al campo stesso dei fenomeni catalitici che ai campi attigui: alludo ai fenomeni di *catalisi negativa*, ai fenomeni di *avvelenamento catalitico* ed *enzimatico*, ai fenomeni di *stato nascente*, della *corrente residua* e delle *sovratensioni elettrolitiche.* Tutto ciò non può peraltro che essere accennato nei limiti imposti al presente riassunto.

4. Dalla rappresentazione ora svolta riassuntivamente dei fenomeni chimico-cinetici, non è difficile svolgere, quale conseguenza di singolare importanza, le linee essenziali di una nuova termodinamica dei fenomeni irreversibili.

Considerato infatti il significato e il valore del postulato chimico-cinetico fondamentale e degli svolgimenti ond'è suscettibile, e che sono riassunti in questa Nota, appare chiaramente che in ogni fenomeno chimico-cinetico, e sono da comprendersi con tale designazione i fenomeni di evaporazione, di sublimazione, ecc., si compie una *selezione* dei sistemi molecolari, l'energia dei quali supera un valore determinato; nel sistema chimico in cui il processo si svolge, si avvera cioè naturalmente la *selezione molecolare* che il Maxwell affidava all'intelligenza del suo demone.

Trattandosi di un processo irreversibile, la velocità del secondo principio termodinamico, in quanto sancisce, nella sua formulazione rigorosa, l'impossibilità del moto perpetuo di seconda specie, rimane immutata. Ma si rivelano nella serie dei fenomeni chimico-cinetici altrettanti processi irreversibili che, a differenza dei processi irreversibili considerati dalla termodinamica classica — fenomeni di attrito, fenomeni di conduzione termica, effetto Joule

nella conduzione elettrica, ecc. — si svolgono naturalmente con *diminuzione d'entropia.* Riesce per tal modo delineata, accanto alla termodinamica classica, che ha per oggetto i fenomeni reversibili, l'auspicata termodinamica dei fenomeni irreversibili, di fronte alla quale la serie dei fenomeni naturali riescono distinti nel modo seguente:

1° i fenomeni reversibili, costituiti da una successione di stati d'equilibrio, e nei quali l'entropia si mantiene costante;

2° i fenomeni irreversibili (conduzione termica, fenomeni di attrito, ecc.) che sono legati ad un aumento d'entropia del sistema nel quale il processo si svolge;

3° i fenomeni irreversibili chimico-cinetici, considerati nella Nota presente, che si svolgono con diminuzione d'entropia del sistema.

Ove si consideri che sono di origine chimico-cinetica la maggior parte delle trasformazioni energetiche che si avverano in natura — fenomeni di evaporazione, di condensazione, di combustione, l'intero chimismo organico, il processo stesso di sintesi clorofilliana — non è difficile rendersi conto della portata che i fenomeni chimico-cinetici e la diminuzione d'entropia che ad essi è legata, assume nell'economia naturale.

Geologia. — *Sull'esistenza di depositi cenomaniani e di altri livelli mesozoici nel Caracorum (Asia Centrale).* Nota del prof. G. Stefanini, presentata dal Socio C. De Stefani [1].

In altra precedente Nota [2] ebbi occasione di dar notizia di una piccola echinofauna mesozoica, raccolta nel Caracorum dai proff. O. Marinelli e G. Dainelli, durante la spedizione italiana al Caracorum (Asia Centrale) nel 1913-1914, pubblicando un elenco delle 14 specie finora riconosciute, e riserbandomi di tornare sull'argomento per metterne in evidenza il significato cronologico e paleobiogeografico.

Tre sono le località fossilifere, che ai due geologi hanno fornito resti di echinidi: esamineremo ora separatamente le tre faunette.

Più ricca, indubbiamente, vuoi per numero di individui, vuoi per numero di specie, ed anche più importante per la maggiore sicurezza delle deduzioni che se ne possono trarre, è la faunetta raccolta al così detto « Campo della piega » nell'altipiano delle Lingzi-Tang, a circa 79° 15

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1917.

[2] Stefanini G., *Echinidi mesozoici del Caracorum raccolti dalla « Spedizione italiana nell'Asia Centrale (1913-1914)* », Rendic. R. Acc. Lincei, vol. XXVI, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 2, luglio 1917, pag. 49.

Long. E. Greenw. a 35° 23′ Lat. N., dove Marinelli e Dainelli accamparono alla fine di giugno del 1914.

Quivi essi raccolsero in due punti, distanti l'uno dall'altro meno di un chilometro, dei fossili che furono tenuti accuratamente separati, ma che appariscono del tutto simili, quasi tutte le specie essendo rappresentate in ambedue le località. I due punti possono dunque considerarsi sicuramente come affioramenti di un identico livello.

Questo ha fornito:

Heterodiadema libycum Des. var.
Diplopodia (*Tetragramma*) sp. ind.
Micropedina olisiponensis (Forb.)
Orthopsis sp. ind.
Pyrina sp. n.
Holaster sp. n.
Hemiaster Orbignyanus Des. var.
" " sp. n.
" " sp. div.
Linthia (?) sp. n.

Il carattere nettamente cretaceo di questa faunetta non ha bisogno di essere rilevato. La grande abbondanza — anche come numero d'individui — di *Hemiaster, Linthia, Micropedina* ed *Heterodiadema* fa subito pensare al Mesocretaceo o al Neocretaceo, anzichè al Neocomiano; ma alcuni elementi permettono di raggiungere, con un più stretto esame, maggior precisione.

È noto che *Tetragramma* rappresenta un ramo relativamente recente delle *Diplopodia*, evolventesi parallelamente a queste durante il Cretaceo inferiore e medio, non oltre però il Cenomaniano. E cenomaniani sono parimente nell'Africa settentrionale e in Europa *Heterodiadema libycum* e *Micropedina olisiponensis*. Turoniano è, invece, *Hemiaster orbignyanus*; ma la varietà tibetana si ritrova nel Cenomaniano d'Egitto, come resulta dai materiali della collezione Figari Bey, che ho attualmente in istudio.

In conclusione, quantunque nella faunetta in esame siano numerose le forme specificamente non determinabili e quelle nuove per la scienza, le poche note sono così caratteristiche, e le indicazioni da esse fornite sono così concordanti con la composizione generale della fauna, che non esito a riferire la medesima, con sicurezza quasi assoluta, al Cenomaniano [1].

[1] Questa conclusione concorda perfettamente con quella che il prof. C. F. Parona, in base allo studio dei materiali malacologici raccolti dalla Spedizione Italiana nelle stesse località, enunciava in una Nota, della quale ho avuto contezza quando la presente era già in corso di stampa. Cfr. Parona C. F., *Faune cretaciche del Caracorum e degli altipiani tibetani* (*Spedizione italiana nell'Asia Centrale 1913-1914*). Rendic. R. Acc. Lincei. vol. XXVI, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 3, pag. 53.

La piccola echinofauna è fossilizzata in un calcare marnoso verdastro con granelli cloritici o glauconitici e con tracce ferromanganesifere, che col loro colore bruno-violaceo fanno spesso risaltare i particolari di struttura degli ambulacri. Gli esemplari sono generalmente più o meno deformati, ma la superficie è ben conservata.

Nei dintorni del « campo oltre Chisil », pure nell'alto bacino del Cara-Cash (79° 10′ Long. E. Gr.; 35° 20′ Lat. N.) i nostri viaggiatori raccolsero, in due punti diversi, ma non molto distanti, altri due interessanti echini, fossilizzati in un calcare compatto più o meno ferruginoso:

Echinobrissus sp. ind.
Globator sp.

La scarsità di una tal fauna e lo stato di conservazione dei due esemplari, uno dei quali addirittura indeterminabile per le deformazioni subìte, l'altro superficialmente corroso e a quanto pare non corrispondente ad alcuna specie nota, non permettono di essere qui così affermativi come nel caso precedente. *Echinobrissus*, del resto, è quasi affatto privo di valore cronologico; *Globator* sarebbe proprio della Creta media e superiore.

Di un interesse del tutto speciale sono finalmente altre due forme, raccolte da Dainelli e Marinelli nella regione settentrionale del ghiacciaio Rimu ad occidente del Passo di Caracorum. Sono queste:

Pseudocidaris sp.
Polycyphus sp. n.

La roccia incassante è una marna o argilla marnosa fortemente ocracea; la conservazione assai buona per il *Polycyphus*, che è rappresentato da due individui, è pur troppo deficiente per l'altro esemplare, tutto pesto e schiacciato.

Il significato di questi due fossili sarebbe particolarmente notevole: mentre infatti *Pseudocidaris* ha una distribuzione cronologica molto ampia, dal Batoniano cioè, al Cenomaniano, *Polycyphus* sarebbe invece assai meno longevo, essendo noto soltanto dall' Oolite inferiore e medio (Batoniano-Rauraciano).

Naturalmente, ci guarderemo bene dal trarre affrettatamente delle conclusioni da questa constatazione: soltanto lo studio delle faune malacologiche, che accompagnavano i due echini citati, affidato già a valenti paleontologi [1], potrà permettere di stabilire, se gli strati in questione appartengano al Giurassico, o non, piuttosto, il gen. *Polycyphus* abbia, almeno nell'Asia centrale, una distribuzione cronologica più ampia, di quella che fino ad oggi si era soliti attribuirgli.

[1] Nella Nota dianzi citata il prof. Parona non ricorda però, dalla regione del Rimu, se non fossili del Cretaceo superiore (nota aggiunta).

In un caso come nell'altro, la notizia sarebbe molto interessante, sebbene sotto aspetti del tutto diversi.

Schizzo della distribuzione
degli affioramenti cenomaniani e dei giacimenti ad echinidi
nell'Asia Centrale.

O Affioramenti cenomaniani sicuramente noti.
\+ Giacimenti con echinidi.
⊕ Cenomaniano con echinidi.
⌖ Regione nella quale furono raccolti gli echinidi dalla Spedizione Italiana nell'Asia Centrale.

Ad ogni modo, e prescindendo da questi punti rimasti per ora insoluti, lo studio del materiale echinologico affidatomi permette di affermare con certezza lo sviluppo di depositi cenomaniani nella deserta e mal nota regione delle Lingzi-Tang, tra il Caracorum e gli altipiani tibetani.

Giova appena ricordare, come terreni di questa età, fossero indicati nell'Asia occidentale per la regione transcaspiana ([1]), per la catena turcimanna ([2]) e per la Persia ([3]); nell'Asia meridionale per l'Arabia e per l'India peninsulare: valle della Nerbudda ([4]), Trichinopoli ([5]), Assam. Nell'Asia centrale poi erano noti con qualche sicurezza solo pei dintorni di Abottabad nello Hazàra (Cashmir), dove Middlemiss ([6]) trovò con ammoniti caratteristiche anche qualche echinide; e per la regione di Tuna, tra il Sikkim e la valle del Brahmaputra (Tibet meridionale), dove le raccolte di Hayden studiate da H. Douvillé ([7]) han posto in luce, tra gli altri livelli cretacei, il Cenomaniano con *facies* ammonitica. Nella serie tipica di Spiti, come anche nella regione del Tibet a nord di Lhassa, esplorata da Sven Hedin ([8]), il Cenomaniano non sembra per ora ben caratterizzato. Anche meno sicura appare finalmente la presenza di terreni di questo periodo nel Fergana presso Gulscia, affermata in una sua Nota dal Boehm ([9]).

Trascuriamo per ora di porre in rilievo i caratteri di questa piccola fauna cenomaniana, rimandando ogni considerazione in proposito al giorno, nel quale essa sarà completamente studiata ed illustrata, limitandoci frattanto ad accennare fuggevolmente all'ampia distribuzione geografica di *Heterodiadema libycum* e di *Micropedina olisiponensis*, che assumono il valore di specie caratteristiche del Cenomaniano in grandissima parte della Mesogea, dalla Spagna per l'Algeria, la Tunisia e l'Egitto fino nel cuore dell'Asia centrale; mentre, a detta del Middlemiss, la fauna coeva del Cashmir presenterebbe affinità con quelle del gruppo di Utatur nell'Asia Meridionale, ordinariamente ritenute di *facies* diversa. La questione però

([1]) Semenow, *Faune des depôts cret. de Manghychlak et de qqs. autres loc. de la prov. Transcasp.*, Trav. Soc. Natur. St. Petersb., 28, 1899.

([2]) Bogdanowich, *Note sur la géologie de l'Asie centrale*, Verh. k. russ. Min. Gesellsch., 2 ser., t. XXVI, 1890.

([3]) Douvillé H., *Mission scientifique en Perse par M. Morgan*, 1904.

([4]) Duncan, *Descript. Echinodermata from str. south-east. coast Arabia and Bagh on the Nerbudda*, Quart. Journ. Geol. Soc., XXI, 1865, pp. 349-363. — *On the Echinoidea of Cretac. Strata of low. Narbada Region*, ibid., XLIII, 1887, pp. 150-155.

([5]) Stoliczka, *The Brachiopoda, Ciliopoda, Echinodermata* ecc. *Cretaceous fauna of Southern India*, Mem. Geol. Surv. India. Palaeont. Indica, vol. IV, 1872-73.

([6]) Middlemiss C. S., *The Geology of the Hazara and the Black Mountains*, Mem. Geol. Surv. of India, 26, 1896, pag. 37. Strati consimili a quelli dell'Hazara apparirebbero, secondo l'autore, anche nell'Hamaua (Cashmir propriamente detto).

([7]) Douvillé H., *Le Cretacé et l'Eocéne du Tibet Central*, Mem. Geol. Surv. India, n. ser., vol. V, 3, Calcutta, 1916.

([8]) Douvillé H., *Le Cretacé de l'Himalaya*, Compte Rendu somm. des Séances de la Soc. Géol. de France, Séance 23 Nov. 1914.

([9]) Boehm J., *Ueber Kreide und Mitteleocän in Turkestan*, Zeitschr. d. deutsch geol. Gesellsch., LIV, 1902, Protok. pag. 112.

richiede più attento esame, e il materiale del Cashmir meriterebbe uno studio accurato.

Ma prescindendo da ciò, conviene fin d'ora attribuire ai proff. Marinelli e Dainelli il merito di aver rivelato con le loro raccolte ed esplorazioni la esistenza sicura del Cretaceo medio nella catena del Caracorum, cioè in un fascio montuoso completamente distinto da quello Himalayano, cui appartengono le località già note del Cashmir da un lato, di Tuna dall'altro; mentre le incerte citazioni dal Fergana e dal Tibet si riferiscono, in ogni modo, a regioni del pari assai lontane e a sistemi orografici evidentemente diversi.

Del resto, quantunque l'esistenza di depositi cenomaniani nel centro dell'Asia non sia certamente, come si è visto, un fatto nuovo, tuttavia gli affioramenti fino ad oggi ivi indicati sono così limitati e rari, le relative citazioni così scarse, poco documentate e in parte anche dubbie, che la presente conferma ed aggiunta non manca di valore anche da un punto di vista più ampio e generale.

Microbiologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici. III. L'influenza del modo di sterilizzazione del latte* [1]. Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi [2].

Lo studio dei fermenti lattici va acquistando importanza sempre maggiore non solamente scientifica ma anche pratica, e non solamente nel campo agricolo ma anche nel campo sanitario, dove le circostanze belligere sono venute ad accrescerla.

Già la teoria del Metchnikoff sull'influenza benefica dei fermenti lattici contro le autointossicazioni intestinali aveva condotto a preconizzarli come rimedio di queste e delle loro molteplici conseguenze morbigene; nè mancò chi si indusse, per analogia, a suggerirli altresì nelle medicazioni. Ora le attuali funeste conseguenze spingono più che mai all'utilizzazione della batterioterapia lattica tanto per le infezioni intestinali quanto per le infezioni chirurgiche che purtroppo aggravano le odierne ferite da guerra. Certo è da augurarsi che gli esperimenti, intrapresi su questo indirizzo in Francia e propagatisi anche fra noi, approdino a felici risultati, imperocchè si verrebbero a sostituire con un trattamento biologico antisettico i comuni

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano.

[2] Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1917.

disinfettanti che qual più qual meno esercitano contemporaneamente un'azione nociva sui tessuti e sulle funzioni organiche.

Ma la questione è, a mio avviso, più complessa di quanto parrebbe a prima vista.

Io ho dimostrato che di fermenti lattici ve ne hanno diversi tipi e che non è indifferente usarne uno piuttosto che un altro nelle applicazioni ai formaggi [1] ed ai silò [2], poichè si tratta di tipi che diversificano non tanto per le proprietà morfologiche quanto e precipuamente per le proprietà fisiologiche biochimiche, per le trasformazioni che ingenerano, per gli enzimi che segregano, per i prodotti che elaborano; tutti elementi che influiscono sull'esito della concorrenza vitale microbica e sull'andamento dei processi fermentativi caseari e foraggeri. Ora le stesse considerazioni sembrami debbano valere anche per le applicazioni mediche, dove pure fra fermenti lattici e germi infettanti si deve stabilire una lotta alla quale possono partecipare non solamente le cellule viventi ma eziandio i loro prodotti di metabolismo.

Fra i prodotti dei fermenti lattici predominano al certo gli acidi derivanti dall'attacco degli idrati di carbonio e segnatamente l'acido lattico, il quale ha un indiscusso potere antisettico; ma sarebbe grave errore trascurare i prodotti provenienti dalla demolizione degli albuminoidi (albumosi, peptoni, aminoacidi, ecc.).

Da tempo [3] io ho messo in luce la esistenza di fermenti lattici capaci di attaccare profondamente la caseina oltrechè il lattosio, fornendo così la chiave per spiegare il processo di maturazione dei formaggi. Ma sulle prime gli Autori non vi hanno posto mente, taluni anzi sorsero a confutare le mie asserzioni giudicando nulla o inconcludente l'attività proteolitica dei fermenti lattici caseari. In parecchi lavori [4] ho additato a giustificazione di questi dispareri la circostanza che tale attività non è di facile accertamento; anzi essa può passare spesso inosservata per diverse cause, fra cui ne ho segnalate precipuamente due che devono avere indotto gli Autori in fallo; e cioè: 1ª le temperature elevate di incubazione a cui sono tenute solitamente le

(1) Gorini C., R. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 1912, XLV, pag. 863. Ved. anche le tredici relazioni annuali sull'attività dell'Associazione per gli studî sulla fabbricazione razionale del formaggio, che sono pubblicate nel Bollett. Ufficiale del Ministero di Agricoltura dal 1904 al 1917.

(2) Gorini C., Otto relazioni sulla batteriologia dei foraggi infossati nei silò, pubblicate nell'Annuario dell'Istituzione Agraria Ponti annessa alla Scuola Superiore di Agricoltura di Milano (anni 1904-1915).

(3) Gorini C., Atti dei Laboratorî scientifici della Sanità Pubblica, Roma, 1892; Giornale della R. Società Italiana d'Igiene, XVI, 1894.

(4) Gorini C., Rendic. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 1907, pag. 947 e 1908, pag. 122; Rendic. R. Acc. Lincei, XIX, 1910, 2° sem.; XX, 1911, 2° sem.; XXI, 1912, 2° sem.; XXIV, 1915, 2° sem., pp. 369 e 470.

lattoculture dei fermenti lattici per favorirne lo sviluppo e l'attacco del lattosio, mentre io ho dimostrato che in generale sono le temperature basse inferiori ai 30° C. le più propizie all'azione caseolitica; 2ª l'utilizzazione delle consuete culture in gelatina per giudicare della proprietà proteolitica dei fermenti lattici che, pur essendo caseolitici, sono inadatti a fondere la gelatina.

E per vero, dacchè ho insegnato ad evitare queste due fonti tanto diffuse di errore, parecchi esperimentatori si ricredettero e riuscirono a scoprire facoltà peptonizzanti in fermenti lattici che prima ne erano ritenuti sprovvisti (valga per tutti l'esempio dello *Streptococcus lacticus*) ([1]).

Senonchè qui non si limitano le cause ostacolanti l'esplicazione proteolitica dei fermenti lattici. Già ne ho posto in rilievo altre attinenti ad alcune particolarità del substrato nutritivo, come la presenza di albuminoidi già peptonizzati, e soprattutto poi certi caratteri del latte dipendenti dall'origine e dall'età sua. Ho messo sull'avviso che male si adatta il latte quando non sia più fresco ed abbia subìto modificazioni microbiche ed enzimatiche; similmente il latte che sia stato sterilizzato da tempo è meno adatto di quello sterilizzato di recente, ecc.

Ultimamente poi, ancora nel campo della sterilizzazione del latte, ho fatto una nuova osservazione che reputo meritevole di speciale trattazione, sia perchè si presta egregiamente ad appianare le controversie tuttavia esistenti fra gli Autori, sia perchè può essere di ausilio nella scelta dei fermenti a scopo agricolo e medico. Essa riguarda il modo con cui la sterilizzazione viene eseguita.

Il latte, lo si sa, è uno dei terreni nutritivi di più difficile sterilizzazione col calore, vuoi perchè, com'è noto, esso suole contenere germi di straordinaria termoresistenza, vuoi perchè, come io ho dimostrato ([2]), esso stesso può contribuire ad aumentare questa termoresistenza avviluppando taluni germi con un mantello protettore di caseina. In conseguenza di ciò, nella sterilizzazione del latte vien fatto facilmente, per amore di garanzia, di spingersi tant'oltre da fargli perdere il colorito bianco e fargli assumere una tinta bruniccia. Quest'imbrunimento è comunemente attribuito alla caramellizzazione del lattosio; ma vi concorre anche un'alterazione della caseina che secondo alcuni Autori ([3]) precede anzi la caramellizzazione. Fatto sta che nel latte sterilizzato bruniccio i batterî non si comportano come nel latte sterilizzato che abbia conservato il color bianco pressochè inalterato. Di tali differenze di comportamento ne ho verificato parecchie affettanti diverse

([1]) Barthel Chr., Rendic. Sesto Congresso Intern. di Latteria di Berna, 1914. Centralbl. f. Bakter. Sez. 2ª, vol. 44°, 1915.

([2]) Gorini C., Rendic. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 1915, XLVIII, pag. 956.

([3]) Orla Jensen-Landw, Jahrbuch d. Schweiz, 1905.

manifestazioni microbiche; fra queste evvi per l'appunto il potere peptonizzante di alcuni fermenti lattici che nel latte bruniccio è molto meno accentuato. È una constatazione di cui ho avuto campo di persuadermi ripetutamente, bastando all'uopo tener conto della profondità di dissoluzione del coagulo latteo, così come per valutare l'attività proteolitica dei germi sulla gelatina basta tener conto della rapidità e intensità con cui essi la liquefano, senza bisogno di ricorrere a determinazioni analitiche.

Ma v'ha di più. I confronti fra culture rigorosamente comparative allestite con diverse specie di fermenti lattici nella medesima qualità di latte, di cui parte era sterilizzato bianco e parte era sterilizzato bruniccio, mi hanno rivelato che talune specie nel latte bruniccio coagulavano con notevole ritardo di tempo (perfino con proroghe di parecchi giorni), e che altre non riuscivano nemmeno a coagularlo, mentre cagliavano regolarmente il latte bianco. Sulle prime pensai ad un inciampo che il latte bruniccio opponesse allo sviluppo ed al potere acidificante dei germi; ma i controlli microscopici e acidimetrici mi distolsero da siffatto sospetto. Allora mi soccorse un altro ragionamento, in forza del quale l'osservazione relativa alla coagulazione del latte viene a collegarsi con quella relativa alla caseolisi, così che l'una va a sostegno dell'altra e insieme concorrono all'interpretazione del fenomeno.

I fermenti lattici, di cui parlo, appartengono a quel gruppo che coagulano per produzione contemporanea di acidità e di un enzima presamico. È noto che l'azione del presame animale, mentre è favorita da un modico calore, è tanto più disturbata quanto più il latte è riscaldato oltre i 40° C.; qui sta anzi il principale se non l'unico ostacolo alla fabbricazione dei formaggi con latte pastorizzato. Gli è pertanto presumibile che analogamente il presame batterico si trovi tanto più inceppato a funzionare nel latte quanto più profonda ne è stata la sterilizzazione, e possa essere del tutto paralizzato nel latte bruniccio. In tal caso la coagulazione del latte per opera dei fermenti lattici presamigeni rimarrebbe affidata esclusivamente o quasi al loro potere acidificante, e quando questo potere, come in molti di detti fermenti, è fiacco, la coagulazione o non si effettua o subisce forti dilazioni.

Ho detto che il fenomeno relativo alla mancata o procrastinata coagulazione si riconnette a quello della mancata o debole peptonificazione del latte bruniccio, ed ecco come. Noi sappiamo che l'azione del presame animale è duplice, coagulante e solubilizzante, consistendo in una trasformazione della caseina per cui essa precipita dapprima e si peptonifica poi; per quanto si sia tentato di scindere queste due azioni, non vi si è mai riusciti completamente; ed io ho dimostrato [1] che la stessa intima unione dei due pro-

[1] Gorini C., Rendic. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 1908, XLI, pag. 117.

cessi esíste anche per i presami microbici. Onde si comprende che se la caseina del latte bruniccio si rifiuta all'effetto precipitante del presame dei fermenti lattici, si deve ricusare altresì al suo consecutivo effetto peptonizzante. Esporrò in una Nota successiva come e con quali accorgimenti la lattocoltura possa servire al riconoscimento ed alla selezione dei fermenti lattici proteolitici.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 7°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XII. Fasc. 4.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Ottobre 1917.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

E. Mancini ***Segretario d'ufficio responsabile.***

Pubblicazione bimensile. N. 8.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVI.° — Fascicolo 8°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^{1}/_{2}$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Nuove applicazioni di una formola commutativa.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI [1].

1. La formola accennata è quella a cui è dedicata una mia recente Nota, inserita in questi Rendiconti [2]. Mi permetto di ritornare, con questa, su tale argomento, per alcuni complementi e alcune aggiunte, che reputo meritevoli d'interesse.

Abbiasi, come nella suddetta Nota, una superficie, σ, generalmente regolare; indichi n la misura del segmento di normale al punto generico, contato dal piede, positivamente da una parte convenuta; u, v una coppia di coordinate curvilinee, ortogonali, atte a individuare i punti della superficie; e sia, col significato consueto dei simboli,

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2 .$$

Posto

$$\lim_{n>0} - \lim_{n<0} = \mathrm{D}$$

e inteso che φ, funzione dei punti dello spazio, e quindi delle coordinate u, v, n degli stessi punti, sia limitata e continua, unitamente colle sue de-

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1917.

[2] *Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni*, a pag. 189 del presente volume, 1° semestre.

rivate, fino a $\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\,\partial v^\nu}$, *separatamente, dalle due parti della superficie, incluse le due pagine, corrispondenti ai due segni di* n, *si ha* (¹)

$$\text{(1)}\qquad D\frac{\partial^{\mu+\nu}\varphi}{\partial u^\mu\,\partial v^\nu}=\frac{\partial^{\mu+\nu}D\varphi}{\partial u^\mu\,\partial v^\nu},$$

donde segue, col consueto significato dei simboli (²),

$$\text{(2)}\qquad D\frac{\partial^\mu}{\partial s_u^\mu}\frac{\partial^\nu\varphi}{\partial s_v^\nu}=\frac{\partial^\mu}{\partial s_u^\mu}\frac{\partial^\nu D\varphi}{\partial s_v^\nu},\qquad D\frac{\partial^\nu}{\partial s_v^\nu}\frac{\partial^\mu\varphi}{\partial s_u^\mu}=\frac{\partial^\nu}{\partial s_v^\nu}\frac{\partial^\mu D\varphi}{\partial s_u^\mu}.$$

D'altre parte, φ potrà ancora concepirsi come funzione di una terna di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, con che si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_u}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s_u}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s_u}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_u},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_u^2}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s_u}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s_u}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_u}\right]^2+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s_u^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial s_u^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial\varphi}{\partial s_v}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s_u}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s_u}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_u}\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s_v}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s_v}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_v}\right]$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial x}{\partial s_v}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial y}{\partial s_v}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial z}{\partial s_v},$$

dove la notazione simbolica ha evidente significato, e le formole analoghe, che si ottengono scambiando u con v.

Combinando colle (2) le quali formole, applicate all'ipotesi che la direzione degli assi delle x e delle y sia quella della tangente, nel considerato punto limite della superficie, alla linea $u=$ cost. e alla linea $v=$ cost., con che

$$\frac{\partial x}{\partial s_u}=1,\qquad\frac{\partial y}{\partial s_u}=\frac{\partial z}{\partial s_u}=\frac{\partial^2 x}{\partial s_u^2}=\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial y}{\partial s_v}=0,$$

(¹) Nota citata.

(²) Difatti, si ha

$$\frac{\partial}{\partial s_u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v},\qquad\frac{\partial}{\partial s_v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s_u^2}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}=\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{G}}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial}{\partial s_v}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u},$$

e le formole analoghe, che si ottengono scambiando u con v. Notiamo che ne risulta

$$\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial}{\partial s_v}-\frac{\partial}{\partial s_v}\frac{\partial}{\partial s_u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\frac{1}{\sqrt{G}}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}.$$

e relazioni analoghe, si trovano immediatamente le seguenti formole, fondamentali per la nostra ricerca:

$$D\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial D\varphi}{\partial s_u}=\frac{\partial D\varphi}{\partial x}, \qquad D\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial D\varphi}{\partial s_v}=\frac{\partial D\varphi}{\partial y}. \tag{3}$$

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 D\varphi}{\partial s_u^2}-\frac{\partial D\varphi}{\partial s_v}\frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2}-D\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial s_u^2}. \tag{4}$$

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial D\varphi}{\partial s_v}-\frac{\partial D\varphi}{\partial s_u}\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial x}{\partial s_v}-D\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial s_u}\frac{\partial z}{\partial s_v}. \tag{5}$$

e le analoghe, che si ottengono, scambiando u con v, x con y.

Inoltre, ponendo in (3) $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ al posto di φ, se ne ricava

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial n}=\frac{\partial}{\partial s_u}D\frac{\partial\varphi}{\partial n}, \qquad D\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial n}=\frac{\partial}{\partial s_v}D\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \tag{6}$$

Donde, valendosi di

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}X+\frac{\partial\varphi}{\partial y}Y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}Z,$$

dove X, Y, Z indicano i coseni di direzione della normale, presa col convenuto senso positivo, e invocando le stesse (3), si ricava, nella suddetta ipotesi $\left(\text{colla quale } X=Y=0,\ Z=1,\ \frac{\partial Z}{\partial s_u}=\frac{\partial Z}{\partial s_v}=0\right)$ [1],

$$\begin{cases} D\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial s_u}D\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}-\dfrac{\partial X}{\partial s_u}D\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial Y}{\partial s_u}D\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ D\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial s_v}D\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}-\dfrac{\partial X}{\partial s_v}D\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial Y}{\partial s_v}D\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}. \end{cases} \tag{7}$$

che completano il quadro.

2. Le precedenti formole si prestano alla deduzione della discontinuità, alla superficie σ, delle derivate prime tangenziali, e di tutte le derivate seconde, nelle due ipotesi della funzione potenziale di superficie

$$\varphi=\int_\sigma\frac{k\,d\sigma}{r}, \tag{8}$$

[1] Per la stessa via, si stabilisce la formola

$$D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

che si presta pure ad utili applicazioni.

e della funzione potenziale di doppio strato

$$(9) \qquad \varphi = \int_\sigma k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma :$$

inteso che k vi rappresenti una funzione regolare delle coordinate curvilinee u, v. Con che è noto verificarsi, nella prima ipotesi, le eguaglianze

$$(10) \quad D\varphi = 0 , \qquad (11) \quad D\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -4\pi k ,$$

e nella seconda

$$(12) \quad D\varphi = 4\pi k , \qquad (13) \quad D\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 .$$

Ammettiamo qua, come postulata, o verificata a parte, l'esistenza e la continuità delle derivate suddette, separatamente dalle due parti della superficie, le due pagine incluse.

3. Nella prima ipotesi, introducendo (10) nelle (3), si ha, in primo luogo,

$$(14) \qquad D\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 , \qquad D\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 :$$

e introducendo (10) e (11) in (4) e (5),

$$(15) \quad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi k \frac{\partial^2 z}{\partial s_u^2} , \qquad (16) \quad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} = 4\pi k \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial z}{\partial s_v} .$$

Ora, indicando con ϱ_u e con R_u le misure del raggio di curvatura della linea $u =$ cost. e della sezione normale avente comune con essa la tangente, nel punto limite considerato, e inteso che sia $\varrho_u > 0$ e R_u positivo o negativo con Z, cioè secondo che il centro di curvatura della sezione normale si trova dalla parte del piano tangente verso cui la normale è presa come positiva, o dalla parte opposta, si ha, pel teorema di Meusnier,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s_u^2} = \frac{Z}{\varrho_u} = \frac{1}{R_u} .$$

Si trova quindi la prima delle due formole

$$(17) \qquad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4\pi k}{R_u} , \qquad D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{4\pi k}{R_v} .$$

Donde, in base a

$$D\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = 0 ,$$

si ricava, indicando con r_1, r_2 le misure dei raggi principali di curvatura, relativi al considerato punto (intesone il segno stabilito colla regola precedente)

$$(18)\qquad D\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi k\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

La (16) fornisce, alla sua volta ([1]),

$$(19)\qquad D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 4\pi k\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}.$$

Naturalmente, r_1, r_2 prendono il posto di R_u, R_v nelle (17), nell'ipotesi che le linee coordinate in discorso siano formate colle linee di curvatura, relative al punto considerato. E in questa stessa ipotesi, la (19) si riduce, per nota circostanza, a

$$(19)'\qquad D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Infine, introducendo (11) e (14) in (7), si ha

$$(20)\qquad D\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} = -4\pi\frac{\partial k}{\partial s_u},\qquad D\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} = -4\pi\frac{\partial k}{\partial s_v}.$$

Osservazione. — Questi risultati si deducono dalle formole di Somigliana, relative ad una terna qualsivoglia di assi coordinati ortogonali, adattandole al nostro caso, e rammentando formole ben conosciute, relative alla curvatura delle linee tracciate sopra una superficie ([2]). È notevole che ciascuna delle (17) rappresenta l'estensione al caso di una linea qualsivoglia della superficie, passante pel punto limite, della formola più particolarmente stabilita pel caso di una linea di curvatura, semplicemente ottenuta coll'introdurre la sezione normale corrispondente alla linea considerata.

4. Nella seconda ipotesi, introducendo (12) in (3), si ha, in primo luogo,

$$(21)\qquad D\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4\pi\frac{\partial k}{\partial s_u},\qquad D\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 4\pi\frac{\partial k}{\partial s_v};$$

([1]) Cfr. la Nota (2) a pag. 202.

([2]) *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1916). Sotto altra forma, le nostre sono le formole, dedotte, con metodo del tutto differente, da Poincaré, nella sua *Théorie du Potentiel Newtonien* (Paris, Carré et Naud, 1899. § 112); comprese le due ultime, stando in generale le relazioni indicate pel caso delle linee di curvatura. Cito tali formole, principalmente per questa avvertenza, non intendendo, del resto, inoltrarmi nella letteratura dell'argomento.

introducendo (12), (13) e (21) in (4), (5) e analoghe, si ha

$$(22)\qquad \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k}{\partial s_u^2} - \frac{\partial k}{\partial s_v} \frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2}, \qquad \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 k}{\partial s_v^2} - \frac{\partial k}{\partial s_u} \frac{\partial^2 x}{\partial s_v^2},$$

$$(23)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial y} &= \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_v} - \frac{\partial k}{\partial s_u} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} = \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_u} - \frac{\partial k}{\partial s_v} \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial y}{\partial s_u} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_v} + \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_u} \right] - \frac{k}{\partial s_u} \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} - \frac{\partial k}{\partial s_v} \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial y}{\partial s_u}; \end{aligned} \right.$$

finalmente, introducendo (13) e (21) in (7),

$$(24)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial z} &= - \frac{\partial X}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_u} - \frac{\partial Y}{\partial s_u} \frac{\partial k}{\partial s_v}, \\ \frac{1}{4\pi} D \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\, \partial z} &= - \frac{\partial X}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_u} - \frac{\partial Y}{\partial s_v} \frac{\partial k}{\partial s_v}. \end{aligned} \right.$$

Si hanno poi dalla Geometria Differenziale le formole seguenti, dove il terzo membro vale per qualunque specie di coordinate curvilinee ortogonali, e il quarto nell'ipotesi che le linee coordinate siano formate colle linee di curvatura [1],

$$(25)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial s_v^2} &= - \frac{\partial}{\partial s_v} \frac{\partial y}{\partial s_u} = - \frac{1}{2} \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial s_u} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial s_u} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s_u^2} &= - \frac{\partial}{\partial s_u} \frac{\partial x}{\partial s_v} = - \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial s_v} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial s_v} \end{aligned} \right.$$

e nel caso delle linee di curvatura [2]

$$(26)\qquad \frac{\partial X}{\partial s_u} = - \frac{1}{r_2}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial s_u} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial s_v} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial s_v} = - \frac{1}{r_1},$$

per mezzo delle quali le formole (22), (23), (24) assumono immediatamente, nelle ipotesi medesime, la forma definitiva.

Osservazione. — Formole nuove, per quanto consta all'autore, per la discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di doppio strato furono date da Somigliana, in una sua recente Nota [3]. Stando ai precedenti risultati, vanno recate a tali formole le modificazioni che risultano dal confronto colle nostre (22)-(26).

[1] Cfr. la Nota (2) a pag. 202 e Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, §§ 43, 55, 135.

[2] Bianchi, op. cit., § 62.

[3] *Sulle derivate seconde della funzione di doppio strato newtoniano*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1916),

Fisica. — *Considerazioni e indagini sulla possibilità di una coesione di natura elettrica.* Nota del Corrispondente MICHELE CANTONE [1].

Molto si è discusso sulla natura delle forze di coesione [2], specialmente dopo che la teoria cinetica dei fluidi assodò l'esistenza di forze di attrazione fra le molecole dei gas. Van der Waals partì anzi dal concetto che non potessero ammettersi (come si faceva prima) forze repulsive fra le molecole, senza cadere nell'assurdo di avere riscaldamento in un gas espandentesi nel vuoto; tuttavia l'esclusione assoluta non fu riconosciuta completamente valida, perchè se non potea negarsi un effetto generale di attrazione fra le monadi del fluido, restava d'altro canto aperto l'adito alla ipotesi di forze repulsive a distanze paragonabili alle dimensioni molecolari, e con legge atta a fare assumere agli urti un carattere fittizio, secondo appare più conforme alla natura reale delle cose; e perciò non mancano teorie cinetiche dei gas dove si ammettono forze dipendenti dalla distanza in guisa da trasformarsi in repulsive per piccoli valori di questa, senza che intervenga per altro alcun concetto fisico rispondente alle particolari espressioni adottate.

Anche sotto l'aspetto formale e prescindendo dalle modalità degli urti si è generalmente ammessa la legge dedotta dal prodetto fisico di una forza attrattiva in ragione inversa della quarta potenza della distanza, ma solo per corpi allo stato fluido; mentre Sutherland [3] nelle molteplici ricerche sulla costituzione dei corpi pone a base di ogni sua teoria la condizione di una forza variabile con questa legge anche quando ammette per i tre stati di aggregazione una coesione di natura elettrica; ed arriva così alla ipotesi di particelle gassose polarizzate che obbedendo ad influenze reciproche assumono uguale orientazione a piccola distanza, e conseguentemente si respingono; laddove nel caso dei solidi spiega la coesione ricorrendo ad orientamenti opposti alternantisi con piccolo intervallo.

Ben diverso indirizzo si ha dal concetto di Einstein [4] di attribuire l'energia interna dei solidi agli atomi funzionanti da oscillatori di Planck, colle caratteristiche variazioni per *quanti* proporzionali alle rispettive frequenze; giacchè, assumendo per ogni corpo il periodo rivelato dai raggi

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1817.

[2] Sull'argomento che si prende in esame in questa Nota non sono a mia conoscenza i lavori pubblicati nei periodici tedeschi dal principio dell'attuale guerra.

[3] Phil. Mag., 4, pag. 625, 1902; 17, pag. 657, 1909; 20, pag. 657, 1910.

[4] Ann. der Phys., 22, pag. 180, 1907.

restanti, o da tal periodo accoppiato a quello di valore doppio giusta la modificazione introdotta da Nernst e Lindemann, si riesce ad ottenere per il calore specifico di molte sostanze a temperature bassissime una legge di variazione in buon accordo coi dati forniti dall'esperienza. Ed a risultati ancora più soddisfacenti, perchè si adattano ad un campo termico molto più esteso, si pervenne in seguito da Debye (¹) sostituendo per le oscillazioni alle forze elettriche le ordinarie forze elastiche ed all'unica frequenza di Einstein tutta una serie di frequenze fino ad un valore caratteristico di ogni sostanza.

D'altra parte Madelung (²), riferendosi a reticoli spaziali del tipo ammissibile per il salgemma e la silvina con legami elastici di ciascun punto materiale ai *18* punti più vicini, riusciva ad esprimere i moduli per mezzo dei coefficienti di proporzionalità che servono ad individuare le reazioni elastiche derivanti dagli spostamenti delle due specie di joni sotto l'impulso del campo elettrico delle radiazioni, ed otteneva per la condizione di risonanza elastica eccitata dalle forze elettriche i periodi caratteristici che in effetti si rivelano colla riflessione dei raggi *restanti* sul salgemma e sulla silvina.

Poco dopo, Einstein (³) partendo dallo stesso concetto fondamentale per il comportamento elastico di un reticolo spaziale notava che alle frequenze dedotte dalla teoria dei calori specifici corrisponderebbero vere vibrazioni elastiche con semilunghezza d'onda data dallo spigolo del cubo elementare: il risultato fu posto in rilievo nel caso dell'argento, ma Bauer vide poi che la deduzione poteva estendersi a tutti i metalli. In modo più rigoroso, senza aversi per altro notevole vantaggio in ordine al confronto coi valori sperimentali, si stabilirono dai sig. Born e Kármán (⁴) le frequenze possibili colle condizioni elastiche dei cristalli del sistema monometrico; epperò lo studio colle nuove ricerche rimane ancora confinato nell'ordine d'idee delle teorie molecolari sull'elasticità, e poichè in fondo le costanti che compaiono nelle nuove relazioni sono espresse in base al confronto di di queste con quelle classiche dell'elasticità, non deve far meraviglia che le varie teorie molecolari abbiano condotto per le singole sostanze a valori poco diversi dei periodi caratteristici, mentre la loro coincidenza coi periodi ricavati dalla legge di dispersione o dalle ricerche col metodo dei raggi *restanti* è ormai da annoverare fra gli effetti di risonanza provocati dalle forze elettriche delle onde luminose sulle cariche delle particelle materiali.

Oltre ai cennati lavori di Einstein, di Nernst e Lindmann, di Debye, abbiamo sull'energia interna dei solidi quelli più recenti di Born e Kár-

(¹) Ann. der Phys., 39, pag. 789, 1912.
(²) Phys. Zeits., 11, pag. 898, 1910.
(³) Ann. der Phys., 34, pag. 170, 1911.
(⁴) Phys. Zeits., 13, pag. 297, 1912.

mán [1] e di Tirring [2], fondati sul computo dell'energia delle vibrazioni elastiche in un reticolo spaziale cubico di sostanza semplice o composta, ma sempre nella ipotesi che l'energia sia distribuita fra le varie frequenze colla legge di emissione per *quanti*; e siccome i risultati delle esperienze si adattano bene a questi sviluppi teorici, si avvalora il concetto che l'energia dei solidi sia da ricercare quasi esclusivamente nei moti vibratorî degli atomi, giacchè pur nel caso dei cristalli, i quali offrono l'esempio di un assetto perfettamente stabile delle particelle costitutive in condizioni geometriche ognora meglio accertate, le nuove teorie ricevono una notevole conferma.

Accennerò in ultimo ad una ricerca in un campo di considerazioni alquanto diverso dai precedenti, poichè sulle orme delle indagini di Lorentz, intese a valutare quali forze elettrodinamiche potessero prodursi su punti elettrizzati per effetto di radiazioni diffuse, Madelung [3] vide che per una radiazione monocromatica dipendente dalla distanza fra le molecole era possibile prendessero origine forze di coesione tali da determinare la compressibilità effettiva. Ma dovrebbero aversi per il ferro le frequenze degli ordinarî raggi X, e perciò appare poco probabile che l'interessante concetto di Madelung schiuda nuovi orizzonti per gli studî sui fattori essenziali della coesione.

A chi voglia studiare senza preconcetti le forze di coesione di un solido si presenta qualche punto scabroso nel vasto ordine di processi prevalentemente energetici; e d'altro canto non può nascondersi che gli odierni concetti sulla struttura elastica dei solidi, considerata dal punto di vista molecolare, non soddisfa lo spirito, perchè in tanto lusso di teorie appoggiantisi tutte alle proprietà elastiche dei corpi resta in generale esclusa ogni indagine sulla natura fisica delle forze agenti fra le particelle e conseguentemente sul meccanismo per cui si esplicano le reazioni elastiche, non bastando a ciò i bastoncini materiali di Madelung, o la formale ipotesi di Einstein e dei suoi seguaci, di forze proporzionali alla variazione di distanza fra due punti senza alcun presupposto sul carattere dei legami.

A mio parere la parte essenziale della questione risiede appunto nelle cause da cui derivano siffatti legami: infatti se si trova un'espressione comoda per l'energia dei moti vibratorî, in quanto estendendo la teoria di Planck si arriva a leggi verificate dall'esperienza, non è men vero che alla energia interna dei solidi le forze di coesione portino un contributo non trascurabile. E per convincersene non vi è che da riferirsi ai risultati concordanti cui si giunge per l'ordine di grandezza delle pressioni superficiali

(1) V. loc. cit., pag. 307.
(2) Phys. Zeits., 14, pag. 867, 1913; 15, pag. 127, 1914.
(3) Phys. Zeits., 13, pag. 489, 1912.

dei liquidi, vale a dire di quelle pressioni che in contrasto col moto di agitazione termica determinano il volume proprio di una massa liquida. Si sa che si tratta di pressioni di migliaia di atmosfere, le quali dànno luogo colla dilatazione termica ad un lavoro non piccolo; ed essendo noto che nel passaggio allo stato solido la coesione cresce notevolmente, anche tenendo conto della minore dilatazione non può certo ammettersi che nei solidi tutto il calore fornito per l'aumento di temperatura vada impiegato solo ad accrescere l'energia delle particelle vibranti, giusta quanto si ammette colle teorie che fanno capo a quelle di Einstein e di Debye. Nè può non rilevarsi che nelle teorie molecolari, quando da Madelung e da Einstein si ricorre ai reticoli spaziali per trovare le frequenze delle vibrazioni elastiche proprie delle singole sostanze, si parte dalla ipotesi che le cariche joniche abbiano effetto solo di provocare per opera del campo elettrico gli spostamenti degli atomi dalle normali posizioni di equilibrio, senza influire del resto sulle condizioni meccaniche del corpo in esame; laddove le forze dovute a tali cariche sono per la loro grandezza atte ad assumere parte essenziale nell'assetto di equilibrio, anche in assenza di forze esterne.

Ho ritenuto dunque opportuna un'indagine per valutare le forze ponderomotrici elettriche nei casi in cui il carattere di joni per gli atomi e la legge di distribuzione di questi possono essere supposti con qualche fondamento, e cioè nel caso semplice di cristalli del tipo del salgemma e della silvina; per i quali in base agli studî dei sigg. Bragg [1] non vi è oggi alcun dubbio sulla esistenza di veri e proprî reticoli spaziali cubici con atomi di metallo ed alogeno che si alternano lungo le direzioni dei tre assi, ed appare probabile la formazione dei cristalli dell'aggruppamento degli joni contenuti nelle rispettive soluzioni.

Ma prima di venire ad uno studio di tal genere credo necessario chiarire un punto che rappresenta l'ostacolo contro cui urtano le nuove teorie molecolari dei solidi. Accertata infatti colle esperienze di Debye [2] e per altre vie indirette la struttura pressochè rigida di un solido, e perciò la mancanza quasi completa di effetti propagantisi per urti, quale azione antagonista può opporsi alle forze attrattive fra gli atomi per modo che ne resti impedito il contatto, riuscendo nel tempo stesso possibile il trasmettersi delle perturbazioni elastiche o termiche? E la questione è tanto più grave in quanto che, pure ammesso un certo numero di elettroni liberi ai quali sarebbero affidati per urti gli uffici anzidetti, si avrebbe da parte di queste monadi, in specie nei coibenti, una tensione troppo piccola per equilibrare la grandissima pressione superficiale.

[1] *X Rays and Crystal Structure*, London, Bell and Sons, 1915; ved. anche Kaye, *X Rays*, London, Longmans, Green and Co, 1914.

[2] Verh. der Deut. Phys. Ges., XV Jahrg., n. 15, § 678.

A me sembra che si possa trovare una via di uscita ricorrendo alle più recenti teorie sulla costituzione dell'atomo, e precisamente al concetto introdotto da Rutherford [1] in seguito alle interessanti esperienze sulle deviazioni prodotte dagli atomi nel cammino delle particelle α e β in una massa gassosa. Ed invero, se l'atomo consiste in un nucleo attorno cui ruotano tanti elettroni quanto è il *numero atomico* dell'elemento [2], è naturale pensare che, pur collo stato neutro in rapporto alle azioni a distanza, non possa mancare per gli atomi vicinissimi una forza ripulsiva tanto grande da produrre l'immediato rimbalzo, a meno che per la velocità relativa con cui avviene l'incontro non si raggiungano i valori eccessivamente elevati delle particelle jonizzanti. Tolto questo caso, resterebbero dunque esclusi gli urti reali fra gli atomi, e analogamente dovrebbero procedere le cose per gli aggregati atomici costituenti le molecole; sicchè la forma sferica, risultante dalle applicazioni della teoria cinetica per tutte le molecole o per gli atomi isolati, deriverebbe da ciò che per legge di probabilità si mette forse in evidenza il valor medio della distanza a cui avviene il rimbalzo. Queste considerazioni si applicano senz'altro alle nomadi di un gas o di un liquido; epperò dal fatto che nei solidi la distanza fra le molecole ha d'ordinario lo stesso ordine di grandezza del loro diametro apparente si è spinti ad ammettere che l'assetto proprio dei solidi si stabilisca quando all'attrazione generale fra le particelle di tutta la massa si contrappongono con pari intensità gli effetti delle forze repulsive fra gli elettroni degli atomi in immediata vicinanza, con un processo statistico dal quale sono da aspettarsi risultati analoghi a quelli degli urti, avuto riguardo anche alla circostanza che le molecole o gli atomi isolati sono alla lor volta soggetti a moti vibratorî. Ed essendo questi processi in rapporto colla struttura interna dei singoli atomi, si comprende come, per sostanze affini, colle dimensioni del germe del cristallo si riveli l'individualità propria degli elementi che lo formano.

A siffatte condizioni di equilibrio non è facile dare una veste matematica; e d'altro canto non giova cercare negli sviluppi analitici i particolari di un edificio di cui non siano assodate le basi; è preferibile dunque indagare anzitutto come e fin dove sia possibile ottenere l'espressione delle forze che determinano la coesione del solido, trattandosi di grandezze che, sia pure in modo grossolano, sono accessibili al nostro esame nel caso dei cristalli semplici avanti indicati.

[1] Phil. Mag., 21, pag. 669, 1911.

[2] Per avere un'idea dei mezzi che permettono d'intravedere la probabile struttura dell'atomo si può consultare il lavoro altamente suggestivo di Bohr, *Sulla costituzione di atomi e molecole* (Phil. Mag., 26, pag. 1, 1913), e l'importante lavoro di Compton sulla *Intensità dei raggi X riflessi e distribuzione degli elettroni negli atomi* (Phys. Rev., gennaio 1917, pag. 29)

Ammessa la distribuzione degli atomi di metallo e alogeno colle corrispondenti cariche, quale si ha ad es. nel salgemma, la forza elettrica risultante per un atomo a sufficiente distanza della superficie è nulla per ragione di simmetria, mentre sulla carica associata ad un atomo dello strato superficiale agisce una risultante normale alla faccia del cubo, data quindi dalla somma di tutte le componenti normali delle forze che emanano dagli altri atomi e perciò espressa dalla formula

$$F=\frac{e^2}{a^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{l^2+m^2+n^2}\,l}{(l^2+m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dove si denota con e la carica di un elettrone, con a la lunghezza dello spigolo di ciascuno dei cubi elementari del reticolo, e con l, m, n i fattori interi per cui bisogna moltiplicare a per avere, rispetto ai tre assi principali di simmetria, le coordinate dei punti con cariche alternativamente positive e negative. Nella formula si suppone inoltre che il primo di tali parametri corrisponda alla normale alla faccia dove è il punto in esame.

Non conoscendosi regole che permettano di trovare il valore esatto della serie, ho dovuto procedere ad un calcolo d'approssimazione non semplice giacchè, pure esistendo il carattere di convergenza, non è possibile arrestarsi a pochi termini nello sviluppo qualunque sia il criterio che voglia seguirsi per ottenere la somma. Io mi sono attenuto a quello che consiste nello sviluppo del primo sommatorio, adottando per i singoli strati a distanze $l=1, 2, 3, \ldots$ il metodo di raggruppamento delle particelle agenti per quadrati con centro nell'atomo che sta di fronte a quello dove si esercita la forza e con lati di lunghezze $2a$, $4a$, $6a$, ... sino al 40° perimetro; e basandomi sulla legge di variazione dei successivi valori approssimati di

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{l^2+m^2+n^2}\,l}{(l^2+m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ho potuto convincermi che coll'approssimazione di $\frac{1}{1.000.000}$ basta fermarsi al calcolo delle somme anzidette per $l=1$ ed $l=2$. Questo dico per incidenza, essendo sufficiente per il nostro grado di approssimazione arrestarsi alla terza cifra significativa coll'assumere il valore $-0,293$ [1]. Si avrebbe dunque:

$$F=-0{,}293\,\frac{e^2}{a^2},$$

[1] Credo opportuno notare che 0,293 coincide quasi col valore dell'espressione $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, e quindi potrebbe stare a rappresentare la grandezza $1-\cos 45°$, ossia il rapporto fra l'angolo visuale di 90° di apertura e l'angolo visuale piatto.

dove il segno — ci avvisa che la risultante è diretta verso l'interno, come era facile prevedere.

Alla forza F corrisponde una pressione data dalla formula

$$p = -0,293 \frac{e^2}{a^4},$$

perchè ogni atomo è nel centro di un quadrato di area a^2 formante parte della faccia del cristallo.

Vediamo ora di stabilire la condizione che permette di dedurre per via teorica dalle forze elettriche le reazioni elastiche; ed a tal fine riferiamoci al caso della compressibilità, per la quale la variazione si riduce a un decremento piccolissimo $-\Delta a$ del lato a di ciascuno dei cubi dei quali si può imaginare formato il cristallo.

Considereremo la pressione esterna che desta l'elasticità di volume quale variazione piccolissima di p, e perciò tale da soddisfare alla relazione

$$\Delta p = 4 \times 0,293 \frac{e^2}{a^5} \Delta a = -4p\lambda,$$

se con λ denotiamo la dilatazione lineare uniforme del corpo in esame; e siccome la dilatazione cubica 3λ è legata al modulo di compressibilità K dell'uguaglianza $K = \frac{\Delta p}{3\lambda}$, dovrebbe risultare

$$K = \frac{4}{3} \times 0,293 \frac{e^2}{a^4} \tag{1}$$

qualora il nostro modo di vedere fosse esatto.

Il confronto coi risultati dell'esperienza non offre difficoltà di sorta: infatti per un sale aloide di massa molecolare m e di densità ϱ il volume del cubo elementare si ha dalla formula

$$a^3 = \frac{1,64 \times 10^{-24} m}{2\varrho}$$

qualora alla massa effettiva di un atomo d'idrogeno si assegni il valore $1,64 \times 10^{-24}$, onde si ottiene:

per il salgemma $a = 2,82 \times 10^{-8}$ c. m.,
per la silvina $a = 3,14 \times 10^{-8}$ c. m..

Sostituendo tali valori nella (1), e ponendo $e = 1,77 \times 10^{-10}$, si ricava:

per il salgemma $K = 1,42 \times 10^{11}$ invece del valore oss. $2,38 \times 10^{11}$,
per la silvina $K = 0,919 \times 10^{11}$ invece del valore oss. $1,60 \times 10^{11}$.

Senza dubbio non esiste in entrambi i casi un buon accordo; ma per quanto si riferisce all'ordine di grandezza può dirsi che il risultato presenta interesse, specialmente quando si consideri che i rapporti fra i valori osservati e calcolati riescono quasi coincidenti, essendo *1,68* quello per il salgemma e *1,74* l'altro; per cui sorge l'idea che possano sparire le divergenze tenendo conto di qualche fattore non preso in esame nel precedente studio. E veramente le forze stesse che agiscono nel primo strato nel senso di avvicinarlo al secondo, la natura complessa dell'atomo, gli effetti medî dei moti da cui sono animati le sue parti, e la vibrazione di tutto l'atomo possono influire in modo non indifferente sulla grandezza della forza di attrazione che risulta dalle cariche libere degli atomi [1].

Partendo dal valore della pressione superficiale importerà anche vedere quale sia il lavoro delle forze interne per effetto della dilatazione termica, allo scopo di stabilire un confronto colla quantità di energia necessaria ad aumentare la temperatura del corpo.

È facile dimostrare che la somma dei lavori per gli spostamenti relativi delle singole particelle è eguale a quello che si compie colla dilatazione termica per vincere la pressione superficiale p; quindi per ogni unità di volume e per un grado viene espressa da $p\alpha$, mentre la corrispondente variazione di energia termica è data dal prodotto del calore specifico C, a pressione costante, per la densità ϱ; sicchè assumendo

per il salgemma, $C = 0{,}215$, $\varrho = 2{,}15$, $\alpha = 0{,}000121$,

per la silvina, $C = 0{,}171$ [2], $\varrho = 1{,}97$, $\alpha = 0{,}000114$,

e ponendo $p = 0{,}293 \frac{e^2}{a^4}$, si ottiene:

$$\frac{L}{V} = p\alpha = 6{,}01 \times 10^6 \ , \ EC\varrho = 9{,}00 \times 10^6 \ \text{per il salgemma,}$$

$$\frac{L}{V} = p\alpha = 3{,}95 \times 10^6 \ , \ EC\varrho = 7{,}16 \times 10^6 \ \text{per la silvina.}$$

Anche qui abbiamo risultati da cui si desume che i valori ottenuti col nostro procedimento, inferiori entrambi a quelli sperimentali, non se ne

[1] Se l'effetto derivante dalle dette influenze può essere rappresentato da un rapporto indipendente, o quasi, dalla particolare natura degli atomi del cristallo, e tale da condurre ad un buon accordo coll'esperienza, al posto del coefficiente 0,293 dovrebbe aversi 0,500.

[2] Questo valore fu ricavato applicando la regola di Koop-Neumann sul calore molecolare dei composti affini ed in base al valore dato dall'esperienza per il salgemma, essendo le ricerche di Nernst sul calore specifico del cloruro di potassio cristallizzato troppo grossolane perchè diano un qualche affidamento.

discostano molto; e ad ogni modo si può asserire che il lavoro di espansione non sarebbe affatto trascurabile secondo il nostro computo.

Per altro lo stesso Einstein nella sua Nota avente per titolo *La teoria di Planck sull'irraggiamento ed i calori specifici* (1) non si nascondeva l'insufficienza della sua ipotesi, sulla natura esclusivamente vibratoria dell'energia interna, quando diceva: *vi sono ragioni per cui la teoria non può applicarsi a rigore: il lavoro di dilatazione non è compreso nella espressione di* C_A, *i buoni conduttori contengono elettroni liberi e a questi compete un contributo di energia, ai moti termici disordinati spettano frequenze che non sono quelle che si determinano coi metodi ottici, e finalmente l'ipotesi fatta di frequenze indipendenti dall'ampiezza non è legittima.*

Evidentemente sono tutte considerazioni giuste; ma dal fatto che l'A. e i suoi seguaci si contentano dell'accordo fra la teoria dei *quanti* adattata al calcolo dei calori specifici ed i risultati dell'esperienza si argomenta che, colpiti dall'apparente successo, non abbiamo voluto valutare l'entità dei contributi relativi ai fattori anzidetti, affidandosi in modo completo a quei teorici gradi di libertà che già nel caso dei gas a molecola biatomica lasciano alquanto a desiderare.

Con questi rilievi non si combatte il concetto informatore della teoria di Planck, la quale del resto, anche mantenendo il carattere formale per cui risponde ai fenomeni in rapporto coll'emissione, cede man mano il posto ad un ordine d'idee aventi base nel meccanismo di emissione delle particelle materiali; ma si ha di mira soltanto un'interpretazione fisica dei fatti che dia modo di accertare fin dove possa avvertirsi l'influenza delle immancabili forze di coesione fra le molecole dei solidi. La nostra indagine ci ha condotto ad una naturale ipotesi sull'origine elettrica della coesione e delle conseguenti reazioni elastiche, senza trascurare le condizioni dinamiche degli atomici sistemi di corpuscoli elettrizzati in quanto si è ammesso l'intervento essenziale di forze repulsive fra gli elettroni di due atomi nella fase di massimo avvicinamento, ossia con un meccanismo paragonabile ad un urto, onde non è escluso che al lavoro elastico di dilatazione termica si accompagni un aumento di energia dei moti vibratorî atomici in rapporto pressochè costante con quel lavoro. E se le cose stessero in tal modo si renderebbe probabile per tutta quanta l'energia termica di un solido una *legge di variazione* quale risulta coll'estendere la teoria dei *quanti* ai moti vibratorî degli atomi, onde resterebbe ancora aperto l'adito alla legittimità della teoria di Einstein prescindendo dal significato di una costante, e cioè dall'applicabilità di quella legge di *equipartizione* fra i gradi di libertà della molecola che non fu riconosciuta legittima da W. Thomson e da altri insigni fisici.

(1) Ann. der Phys. 22, pag. 188.

Non nego che possa apparire troppo ristretto il campo cui si riferiscono le attuali indagini, essendosi avuti di mira quasi esclusivamente cristalli di un tipo assai semplice per il giuoco delle forze elettriche. Potrei notare che quasi tutti gli studî recenti sulla teoria molecolare dell'elasticità, come parecchi di quelli sui calori specifici, sono svolti nella stessa cerchia limitata, e che del resto per cristalli di struttura più complessa dovrebbero valere considerazioni analoghe; ma non si sfugge con ciò alla naturale domanda circa l'ipotesi che dovrebbe farsi sulla coesione degli elementi allo stato solido. Certo non è qui il caso di parlare di effetto dovuto alle cariche generantisi per gli elettroni che si rendono liberi, sia perchè questi anche nei metalli sono in quantità esigua rispetto al numero di atomi, sia perchè i corpuscoli col loro libero moto rivelano effetti di plasticità in contrasto colla rigidezza caratteristica dei solidi; nè possono ammettersi oggi semplici forze attrattive emananti dalla materia, in quanto che permane sempre la necessità di uno stato di equilibrio fra le azioni costanti aventi ufficio di legami e gl'impulsi di carattere repulsivo; e ciò importa che non possono esistere condizioni essenzialmente diverse quando dai corpi composti si passi ai semplici; ragione per cui si è indotti ad estendere alla struttura complessiva di un corpo semplice la stessa ipotesi messa avanti dal Bohr (¹) per rendere ragione del vincolo fra gli atomi di una molecola gassosa. Secondo il concetto di questo fisico si suppone, per l'idrogeno ad es., che coll'avvicinarsi di due nuclei coi rispettivi elettroni satelliti le orbite di questi si distacchino dai primitivi centri dando luogo in ultimo a due elettroni in unico giro nel piano di simmetria rispetto alla congiungente le parti positive dei due atomi. E se in tal guisa trovasi un legame elettrico plausibile fra due atomi in apparenza neutri, non semberà strano concepire che lo stato di equilibrio dell'argento o del diamante derivi dal concatenamento analogo di tutti gli atomi che formano il cristallo, con quelle configurazioni che rispondano alla particolare natura dei sistemi di corpuscoli in presenza; sicchè l'edificio cristallino, il quale sta a rappresentare la struttura tipica di un solido, avrebbe nel suo grande complesso molecolare le condizioni armoniche di assetto fra l'energia della parte viva degli atomi e quella di forma potenziale inerente alle forze fra le cariche elettriche.

(¹) Phil. Mag., 26, pag. 1, 1913.

Matematica. — *Proprietà invariantive degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi generale di Grassmann.* Nota della dottoressa Rosaria Giordano, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Gli operatori che, sotto il nome di *hamiltoniani* e *gradienti*, il mio maestro prof. A. Del Re ha introdotti nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann, dapprima con lezioni dettate nei suoi corsi di matematiche superiori, e poi con articoli comparsi nei Rend. della R. Accad. di Napoli [2], e nei Rend. della R. Accad. dei Lincei [3], godono della proprietà di essere degli invarianti *assoluti ortogonali*, cioè di non cambiare se, al sistema originario delle *unità* $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ di riferimento, se ne sostituisce un altro composto di *unità* $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n+1}$ pure mutuamente normali (in altri termini, siffatti operatori sono indipendenti dal sistema *unitario-ortogonale* degli elementi di riferimento); e ciò sia che operino sopra funzioni scalari che sopra funzioni estensive. Questa interessante proprietà che, in seguito a suggerimenti e consigli dello stesso mio maestro, io ho qui provata, contiene, limitatamente al caso ovvio delle tre dimensioni e del corrispondente campo di vettori, la proprietà analoga dell'operatore $\triangle$ di Hamilton e del gradiente di Maxwell, che parecchi provarono con procedimenti non estendibili al caso generale qui considerato e nemmeno paragonabili, circa la semplicità e il carattere strettamente analitico, al modo di trattamento qui seguito per siffatto caso generale.

I lavori ai quali dovrò fare ricorso, oltre ai già citati, sono i seguenti che indicherò rispettivamente con (DR, I), (DR, II): Del Re, *Sopra alcune formule fondamentali nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann* Rend. Accad. Napoli, 1911); idem, *Hamiltoniani e gradienti di formaioni estensive nell'analisi generale di Grassmann* (Rend. Accad. Lincei, settembre 1916).

Per quanto riguarda sia le definizioni che le notazioni mi riferisco interamente a quanto trovasi consegnato nei citati lavori del prof. Del Re. Così, ad es., scrivendo

$$(1) \qquad \Omega = \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \cdots + \omega_m E_m \quad , \quad m = \binom{n+1}{\varrho}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1917.

[2] *Gli hamiltoniani ed i gradienti nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann* (Rend. sudd., Nota I e Nota II, che in appresso indicheremo con N. I e N. II, nel fascicolo luglio-ottobre 1916; *Gli ham. ed i grad. rispetto a formazioni non interamente libere* (idem, nov. dic. 1916).

[3] Cfr. fasc. dei mesi sett. ott. nov., 1916, 3 Note.

intendiamo che $E_1, E_2, \ldots, E_m$ rappresentino i prodotti ϱ a ϱ degli $n+1$ vertici $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ della piramide di riferimento (i ϱ-spigoli di tale piramide) ordinati in una maniera prestabilita e da tener fissa nel periodo di uno stesso ragionamento; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sono delle grandezze scalari, ed Ω è la formazione che risulta, per via di addizione, dai prodotti $\omega_1 E_1$, $\omega_2 E_2, \ldots, \omega_m E_m$.

1. Ciò premesso, sia U una funzione scalare delle $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ dalla cui variabilità dipende quella della formazione Ω, rispetto alla quale s'intendono presi l'hamiltoniano $\nabla_\Omega U$ e il gradiente $G_\Omega U$ della U. Se indichiamo con $E'_1, E'_2, \ldots, E'_m$ le formazioni d'ordine ϱ, fatte con le unità $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ (i ϱ-spigoli della nuova piramide di riferimento $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$), per la formola (2) della Nota testè citata (DR, I) si avrà:

$$\Omega = (\Omega | E'_1)\, E'_1 + (\Omega | E'_2)\, E'_2 + \cdots + (\Omega | E'_m)\, E'_m ; \tag{2}$$

ovvero, dopo aver posto, per tutti i valori di i da 1 ad m,

$$\omega'_i = (\Omega | E'_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m): \tag{3}$$

$$\Omega = \omega'_1 E'_1 + \omega'_2 E'_2 + \cdots + \omega'_m E'_m . \tag{4}$$

Per mezzo delle (3) le $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sono delle funzioni scalari delle $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m$, e perciò la U è funzione di queste $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m$.

Derivando quindi la U col teorema delle funzioni di funzioni, si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial \omega_r} = \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_1} \dfrac{\partial \omega'_1}{\partial \omega_r} + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_2} \dfrac{\partial \omega'_2}{\partial \omega_r} + \cdots + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_m} \dfrac{\partial \omega'_m}{\partial \omega_r} \\ \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) ; \end{array} \right. \tag{5}$$

ovvero, visto che le (3), in forma sviluppata, possono essere scritte come segue, per $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\omega'_i = \omega_1 (E_1 | E'_i) + \omega_2 (E_2 | E'_i) + \cdots + \omega_m (E_m | E'_i) , \tag{6}$$

si avrà ancora

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial \omega_r} = \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_1} (E_r | E'_1) + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_2} (E_r | E'_2) + \cdots + \dfrac{\partial U}{\partial \omega'_m} (E_r | E'_m) \\ \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) . \end{array} \right. \tag{7}$$

Da queste deducesi, moltiplicando ordinatamente per $E_1, E_2, \ldots, E_m$, sommando membro a membro, e tenendo conto che

$$(E_i | E'_r) = (E'_r | E_i) \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, m):$$

$$G_\Omega U = \frac{\partial U}{\partial \omega'_1} \sum_r (E'_1 | E_r)\, E_r + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega'_m} \sum_r (E'_m | E_r)\, E_r . \tag{8}$$

Ma, per la citata formula (2) del citato lavoro (DR, I), è:

$$(E'_i|E_1)\,E_1 + (E'_i|E_2)\,E_2 + \cdots + (E'_i|E_m)\,E_m = E'_i$$

$$(i = 1\,,2\,,\ldots,m)\,;$$

dunque sarà

$$G_\Omega U = \frac{\partial U}{\partial \omega'_1}E'_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega'_2}E'_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega'_m}\,. \tag{9}$$

Dal confronto della espressione originaria

$$G_\Omega U = \frac{\partial U}{\partial \omega_1}E_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega_2}E_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega_m}E_m$$

del $G_\Omega U$ con la (9) si vede che *il gradiente della funzione scalare* U *delle variabili* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, *coordinate della formazione* Ω *rispetto alla piramide* $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ *di riferimento, e il gradiente della* U *considerata quale funzione delle coordinate* $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m$ *della stessa* Ω, *rispetto alla nuova piramide* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ *di riferimento, sono un unico e medesimo ente.*

2. Se la funzione U è estensiva, nella forma, ad esempio che prendiamo dalla (DR II)

$$U = U_1 \cdot F_1 + U_2 \cdot F_2 + \cdots + U_q \cdot F_q\,, \tag{10}$$

indicando con $F'_1, F'_2, \ldots, F'_q$ i σ-spigoli della nuova piramide $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ [σ, rammentiamolo qui esplicitamente, è la specie della U, ed è $q = \binom{n+1}{\sigma}$], avremo:

$$U = (U|F'_1)\,F'_1 + (U|F'_2)\,F'_2 + \cdots + (U|F'_q)\,F'_q\,, \tag{11}$$

epperò, ponendo

$$(U|F'_i) = U'_i \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots,q)\,, \tag{12}$$

sono le U'_i funzioni scalari delle $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ e quindi pure delle $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m$ quali sono date dalla (6). Indicando poi con $G_{\Omega'}U$ il gradiente di U quando ci riferiamo alla nuova piramide ed alla Ω così anch'essa riferita, cioè alla Ω espressa nella forma Ω' (diciamo) data dalla (4), avremo

$$G_\Omega U = (-1)^\theta (G_{\Omega'}U'_1 \cdot F'_1 + G_{\Omega'}U'_2 \cdot F'_2 + \cdots + G_{\Omega'}U'_q \cdot F'_q) \tag{13}$$

con $\theta = \varrho\sigma\,, \varrho\varrho'\,, \sigma\sigma'$, secondochè $\varrho + \sigma \lesseqgtr n + 1$.

Ora, per essere

$$|F'_i = (F'_i|F_1)|F_1 + (F'_i|F_2)|F_2 + \cdots + (F'_i|F_q)|F_q ,$$

per i da 1 a q, e quindi

$$(U|F_i) = \sum_r U_r F_r \cdot \sum_i (F'_i|F_r)|F_r = \sum_r U_r(F'_i|F_r) ,$$

con i $\sum$ estesi pure essi da 1 a q, sarà, da quanto si è detto nel n. 1,

$$G_{\Omega'} U'_i = G_\Omega U_i = \sum_r U_r F_r \cdot \sum_i (F'_i|F_r) = \sum_r G_\Omega U_r (F_r|F'_r) ;$$

d'onde, moltiplicando a diritta per F'_i, e sommando da 1 a q:

$$\sum_i G_{\Omega'} U'_i \cdot F'_i = G_\Omega U_1 \cdot \sum_i (F_1|F'_i) F'_i + \cdots + G_\Omega U_q \cdot \sum_i (F_q|F'_i) F'_i .$$

Ma, per $r = 1, 2, \ldots, q$, è [(DR, I), form. (2)]:

$$(F_r|F'_1) F'_1 + (F_r|F'_2) F'_2 + \cdots + (F_r|F'_q) F'_q = F_r ;$$

dunque, moltiplicando per $(-1)^\theta$, sarà, in fine:

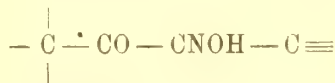
$$G_{\Omega'} U' = (-1)^\theta \sum_i G_\Omega U_i \cdot F_i = G_\Omega U , \tag{14}$$

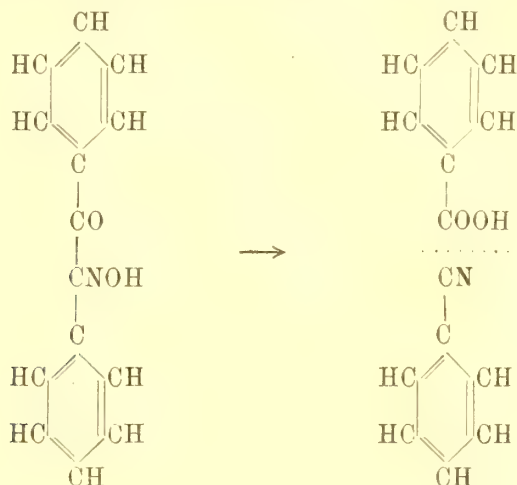
la quale dimostra la *proprietà enunciata del gradiente,* in ordine a un mutamento della piramide di riferimento, *anche quando si tratti di funzioni estensive.*

3. Visto il modo col quale si passa dal gradiente all'hamiltoniano [cfr. N. I e N. II, e le formule (7) nella 2ª delle 3 Note ai Lincei, citate in principio, circa le definizioni di questi operatori e le relazioni fra loro], visto che Ω e $|\Omega$ subiscono gli stessi cambiamenti circa le coordinate quando si cambia di piramide di riferimento, e visto inoltre che il cambiamento di Ω in $|\Omega$ porta seco il cambiamento di ϱ in $\varrho' = n + 1 - \varrho$ e di ϱ' in ϱ, sicchè rimane inalterato il fattore $(-1)^{\varrho\varrho'}$ che accompagna l'espressione di un hamiltoniano, le conclusioni enunciate circa i gradienti valgono senz'altro circa gli hamiltoniani.

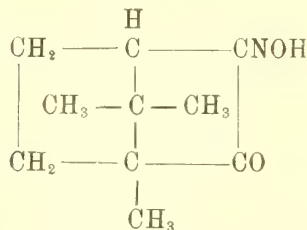
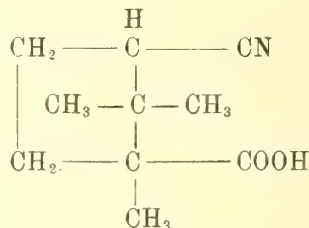
Chimica. — *Sulla scomposizione dell' isonitrosocanfora mediante il riscaldamento* (1). Nota di E. Sernagiotto, presentata dal Socio G. Ciamician (2).

Claisen e Manasse (3) notarono che, quando l'isonitrosocanfora viene riscaldata oltre il suo punto di fusione, essa si decompone in un gas, il quale brucia con fiamma bleu e che supposero fosse ossido di carbonio, ed in un olio di odore di forone, in cui si separano dei cristalli, solubili in alcool, Essendomi occorso di studiare questa scomposizione, reputai non privo di qualche interesse esaminare il fatto più completamente, tanto più che esso si collegava a ricerche fatte sulla scomposizione delle ossime, riscaldate oltre il punto di fusione (4), ed alle esperienze di Kotz e Wunstorf (5) i quali, fra l'altro, notarono che l' isonitrosocanfora, riscaldata a 240°, si decomponeva, originando il nitrile dell'acido dimetileptilenico ed anidride canforica. Ciò non si accorda con quanto ebbero ad osservare Beckmann e Köster (6) per l' α-benzilossima, la quale ha nella sua molecola l'aggruppamento

$$-\overset{|}{\underset{|}{C}}-CO-CNOH-C\equiv$$

che è appunto quello che si trasforma per azione del calore, in comune colla molecola dell' isonitrosocanfora. Questi autori provarono che l' α-benzilossima, nel fondere, si decompone in acido benzoico e benzonitrile, cosa che avviene per la traslazione dell'ossidrile dal gruppo ossimico al carbossile vicino

```
        CH                         CH
   HC ⁄ ╲ CH                  HC ⁄ ╲ CH
     |   ||                     |   ||
   HC ╲ ⁄ CH                  HC ╲ ⁄ CH
        C                          C
        |                          |
        CO                         COOH
        |            ⟶         . . . . . . .
        CNOH                       CN
        |                          |
        C                          C
   HC ⁄ ╲ CH                  HC ⁄ ╲ CH
     |   ||                     |   ||
   HC ╲ ⁄ CH                  HC ╲ ⁄ CH
        CH                         CH
```

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale dell' Università di Bologna. (2) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1917. (3) Annalen, *274*, pag. 77. (4) Angeli, A. L. [5], vol. *21*, parte 1a, pp. 83-84; vol. *22*, parte 1a, pag. 735. (5) C., 1913, **II**, 2032; Berichte, vol. *33*, pp. 2956-2958. (6) A., vol. *274*, pag. 6.

Era da ritenersi verosimile che nell'isonitrosocanfora, sottoposta all'azione del calore, sarebbe avvenuta una trasposizione analoga, ciò che venne pienamente confermato dai fatti che osservai e che qui espongo, dai quali risulta che questo composto si isomerizza per la massima parte, se riscaldato fino a decomposizione, nell'α-nitrile dell'acido canforico, secondo lo schema seguente:

$$\begin{array}{lcr} & H & \\ CH_2 — & C & — CNOH \\ | & | & | \\ | & CH_3 — C — CH_3 & | \\ | & | & | \\ CH_2 — & C & — CO \\ & | & \\ & CH_3 & \end{array} \qquad \begin{array}{lcr} & H & \\ CH_2 — & C & — CN \\ | & | & \\ | & CH_3 — C — CH_3 & \\ | & | & \\ CH_2 — & C & — COOH \\ & | & \\ & CH_3 & \end{array}$$

Isonitrosocanfora — α-nitrile dell'acido canforico

Gr. 10 di isonitrosocanfora vennero posti in un palloncino, munito di refrigerante a ricadere e parzialmente immerso in un bagno di lega e riscaldati oltre la temperatura di fusione, la quale è di 153°. Quando il bagno giunse a 206°-207°, il prodotto cominciò a decomporsi rapidamente, con forte sviluppo di un gas, di reazione debolmente alcalina e di odore leggermente ammoniacale.

Nel palloncino rimase una sostanza peciosa, di colore giallognolo, la quale venne sottoposta a distillazione con vapore d'acqua, con che si separò una frazione oleosa, volatile, leggermente colorata in giallo. Questa venne estratta con etere e fatta reagire a lungo con eguali pesi di cloridrato di semicarbazide e di acetato potassico in soluzione acetica, senza che si formasse altro che una piccola quantità di composto cristallino. La parte non combinatasi con la semicarbazide, venne ripresa col vapore d'acqua, indi estratta con etere e distillata a pressione ordinaria. Essa bolliva quasi tutta a 198°-200°. Analizzata diede:

Sostanza gr. 0,1462; CO_2 gr. 0,4256; H_2O gr. 0,1324.

In 100 parti:

		Calcolato per $C_{10}H_{16}O$
C	79,39	79,00
H	10,13	10,40

Fatta reagire con l'idrossilamina, vi si combinò in parte, con formazione di un olio verdognolo, il quale si scioglieva negli alcali, sviluppando una intensa colorazione rosso-porpora, la quale spariva per acidificazione. Questa parte volatile era quindi di natura chetonica od aldeidica, ma di costituzione non ancora chiarita.

La pece, che rimase dopo la distillazione col vapor d'acqua del prodotto di scomposizione dell'isonitrosocanfora, e che ne rappresenta quasi la totalità, era solubile, a caldo, in acqua, con reazione fortemente acida. Dalla soluzione acquosa, decolorata per trattamento con carbone animale, si separò una parte solida, la quale, cristallizzata ripetutamente, si presenta in lunghi aghi, fondenti a 151° e di formola $C_{10}H_{15}O_2N$. Infatti, analizzati, diedero:

Sostanza mgr. 4,754; CO_2 mgr. 11,65; H_2O mgr. 3,64.
" " 2,344; N (a 17° e 754 mm.) cmc. 0.152.

In 100 parti:

		Calcolato per $C_{10}H_{15}O_2N$
C	66.26	66,25
H	8,56	8.34
N	7,85	7,71

La composizione centesimale e le proprietà di questo composto lo identificano con l'α-nitrile dell'acido canforico.

Microbiologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici.* IV: *La lattocoltura nella selezione dei fermenti latticoproteolitici* [1]. Nota del prof. COSTANTINO GORINI, presentata dal Socio G. BRIOSI [2].

Dal complesso delle ricerche esposte nella Nota precedente sull'influenza del modo di sterilizzazione del latte deriva che in base al comportamento di un fermento lattico nel latte diversamente sterilizzato si può arguire sulle sue attività acidificante e presamigena. Se esso coagula solamente il latte sterilizzato bianco e non il bruniccio, è lecito inferire che sia piuttosto presamigeno e debole acidificatore; se invece coagula tanto il bianco quanto il bruniccio, è lecito inferire che sia un energico acidificatore, capace cioè di precipitare la caseina per sola acidificazione, produca o non produca anche del presame. Il disciogliersi poi del coagulo dipende se nella coagulazione è intervenuta l'azione presamica del germe, vale a dire se la caseina è precipitata semplicemente per acidificazione, cioè per rottura della sua combinazione col calcio, oppure per trasformazione in paracaseina suscettibile di risentire l'attività peptonizzante del presame. E l'intervento dell'azione presamica è tanto minore quanto più le condizioni del latte, per effetto della

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano.

[2] Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1917.

sterilizzazione, si sono discostate da quelle del latte crudo; onde si deve dedurre che il biochimismo dei fermenti lattici nel latte sterilizzato non è punto lo stesso che nel latte crudo e la differenza è tanto più profonda quanto più profondo è stato il riscaldamento del latte.

Appare adunque sempre più fallace il fare induzioni sull'azione di un dato fermento lattico nella maturazione dei formaggi in base alle culture in latte sterilizzato, senza tener conto del modo di sterilizzazione. Questa trascuranza è molto diffusa; e per vero pochi sono gli Autori che precisano il modo da loro adottato per detta sterilizzazione.

La sterilizzazione del latte può farsi a vapore corrente o a vapore sotto pressione. Nei primordî della batteriologia si usava quasi solamente il vapore corrente ricorrendo alla sterilizzazione frazionata in tre giorni; in seguito però, a risparmio di tempo e di combustibile, si preferì il vapore sotto pressione nell'autoclave; e qui è assai più facile oltrepassare il punto critico in cui il latte perde il color bianco se appena si valichi la mezza atmosfera o si prolunghi la seduta. E ciò non è raro avvenga per varie ragioni, non ultima quella di garantire la perfetta sterilizzazione; talchè io non credo di andare errato (anche in base ad osservazioni sopraluogo) ritenendo che molti Laboratorî si valgano di latte più o meno imbrunito e che la facoltà coagulante e proteolitica di certi batterî sia stata misconosciuta perchè furono coltivati in latte sterilizzato a temperatura eccessiva.

Accennerò in primo luogo alla *microflora mammaria* che da tempo io [1], seguìto ultimamente da vari Autori [2], insisto nel giudicare importante, vuoi nei riguardi caseari vuoi nei riguardi sanitari, per le sue attitudini acido-peptonizzanti, mentre parecchi altri Autori perseverano tuttora nello stimarla inconcludente e incapace di alterare il latte; certo si è che, essendo per lo più dotata di potenziale acidificatore troppo debole per precipitare di per sè solo la caseina, essa non riesce a determinare modificazioni appariscenti in un latte la cui caseina sia stata dalla esuberante sterilizzazione resa insensibile all'azione presamica della microflora medesima; pertanto lo studio del suo biochinismo richiede speciale accuratezza.

Accennerò ancora ai *fermenti propionici* ai quali Freudenreich e Orla Jensen attribuiscono l'occhiatura del formaggio Emmenthal; essi, secondo i medesimi Autori, somiglierebbero in tutto ai fermenti lattici fuorchè non

[1] Gorini C., Rendic. R. Acc. Lincei. 1902, pag. 162; Rendic. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett., 1901, 34°; 1906, 39°; 1907, 40°; 1916, 49°; La Clinica Veterinaria, 1914, pag. 707.

[2] Hastings e Hoffmann, Bull. Viscons in Agric. Exper. St. 1909, 6, pag. 189; Harrison e Savage, Revue Générale du lait, 1912, 9, pag. 121; Harding e Wilson. Techn. Bull. Geneva Agric. Exp. St. 1913, 27; Evans Alice, Journ. of infec. diseases, maggio 1916; Löhnis F., Centralbl. f. Bakter. 2ª sezione, 43°, 1915, pag. 279; Burri R., Schweiz. Milchzeitung, 1916 e Landw. Jahrb. d. Schweiz, 1917, pag. 315.

coagulano il latte e sono incapaci di attaccare la caseina (¹). Ora conviene sapere che precisamente Freudenreich e Orla Jensen sono fra coloro che sterilizzano profondamente il latte, siccome emerge dai loro trattati (²) e come potei constatare io medesimo durante la mia permanenza nel loro Laboratorio presso la Stazione Federale Agraria di Liebefeld-Berna; laonde parmi che, in seguito alle mie presenti ricerche, le summentovate asserzioni meritino per lo meno conferma. Dal canto mio debbo dichiarare che, avendo ottenuto ultimamente dalla cortesia del prof. R. Burri della suddetta Stazione alcuni stipiti di fermenti propionici, ho verificato che essi riescono tanto a coagulare quanto a peptonificare il latte purchè siano coltivati in latte bianco; per cui non esito a classificarli pur essi fra i miei batterî acido-presamigeni.

Certamente il latte sterilizzato bianco abbisogna di un più severo controllo della sua amicrobicità. Io non soglio usare latte bianco che non sia rimasto quindici giorni in termostato a 37° C., giusta i consigli che ho dato, fin dal primo sorgere della sterilizzazione industriale del latte in Italia, per il latte sterilizzato del commercio, in base alle mie ricerche sui germi in esso superstiti, precorrendo il lavoro analogo del Flügge che è erroneamente passato per il primo sull'argomento (³).

Riassunto delle Note III e IV. — L'importanza crescente che vanno assumendo i fermenti lattici non solamente nel campo agricolo (caseificio, insilaggio) ma anche nel campo medico (infezioni intestinali e chirurgiche) deve spingere ad approfondirne lo studio per poter differenziare e selezionare le specie più indicate ai singoli scopi e coltivarle in guisa da trarne tutti i benefici di cui sono capaci.

Come vado dimostrando da tempo, i fermenti lattici si diversificano non tanto per le loro proprietà morfologiche quanto per il loro biochimismo, talchè non è indifferente usare di uno piuttosto che di un altro fermento nelle applicazioni da me proposte all'industria casearia e all'infossamento dei foraggi.

Accanto al potenziale acidificante dei fermenti lattici interessano grandemente le loro attività proteolitiche, sulle quali ho richiamato per primo l'attenzione, segnalandone il valore dal punto di vista scientifico e pratico

(¹) Orla Jensen, *Die Bakteriologie in der Milkwirthschaft*, Jena, 1913, pag. 44.

(²) Freudenreich Ed., *Die Bakteriologie in der Milkwirthschaft*, Jena, 1906, pag. 88 (sterilizzazione a 110-115° C. per un quarto d'ora); Orla Jensen, loc. cit., pag. 19 (sterilizzazione in autoclave per un quarto d'ora a 110-120° C.) e pag. 86 (sterilizzazione per un'ora a 105° C. o per un quarto d'ora a 115-120° C.).

(³) Il mio lavoro venne pubblicato sul Giornale della R. Società Italiana d'Igiene nel *gennaio* 1894, mentre il lavoro del Flügge apparve sulla Zeitschrift für Hygiene und Infectionskrankheiten, vol. 17°, fasc. 2°, pag, 272, nel *maggio* 1894.

sia per la maturazione dei formaggi (1) e dei silò (2) sia per la batterioterapia intestinale (3).

Le attività proteolitiche dei fermenti lattici sono state per lunga pezza misconosciute a cagione di condizioni inadatte di studio. Infatti, dopo che io ebbi reso nota l'influenza inibitrice che sul dispiegamento di dette attività è esercitata da tali condizioni, inerenti particolarmente alla temperatura di incubazione ed alla natura dei substrati nutritivi in cui sono coltivati i fermenti lattici, le opinioni degli Autori vennero man mano modificandosi e correggendosi e la capacità peptonizzante venne ammessa in tipi di fermenti lattici che ne erano ritenuti esenti.

Ma non basta. Vi è un'altra causa di errore da dirimere: essa consiste nella temperatura eccessiva a cui viene sterilizzato comunemente il latte per la cultura dei fermenti lattici onde il latte imbrunisce con alterazione della caseina. È una causa apparentemente secondaria, ma che deve essere passata finora negletta dal momento che gli Autori non si curano di indicare nei loro lavori il modo di sterilizzazione del loro latte e dal momento che i trattati di batteriologia lattiera consigliano metodi di sterilizzazione che conducono indubbiamente all'imbrunimento del latte; d'altronde è una causa facilissima da incappare per amore di una perfetta sterilizzazione.

Il latte che sia stato o troppo prolungatamente o troppo elevatamente riscaldato, male si presta alle attività presamiche peptonizzanti dei fermenti lattici (4). Qui sta verosimilmente altro dei motivi per cui molti Autori contraddicono alle mie vedute sull'importanza di certi batteri del formaggio, delle mammelle ecc.

Per lo studio preciso sul biochimismo dei fermenti lattici necessita che il latte sia sterilizzato colle dovute precauzioni in guisa che si allontani il meno possibile dal proprio colorito bianco; ciò si può ottenere anche in autoclave, ma meglio a vapore corrente, cioè a temperatura non superiore ai 100° C. ricorrendo alla sterilizzazione frazionata di 15-20 minuti per tre giorni consecutivi. Meglio ancora sarebbe se si potesse limitarsi a tem-

(1) Gorini C., R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. 1912, pag. 863. Cfr. anche le relazioni annuali sull'attività dell'Associazione per gli studi sulla fabbricazione razionale del formaggio, che sono pubblicate nel Bullettino Ufficiale del Ministero di Agricoltura del 1904 al 1917.

(2) Gorini C., Otto relazioni sulla batteriologia dei foraggi infossati nei silò, pubblicate nell'Annuario dell'Istituzione Agraria Ponti annessa alla Scuola Sup. di Agricoltura di Milano (anni rurali 1904-1915).

(3) Gorini C., *Il fermento lattico proteolitico per la batterioterapia intestinale.* Atti Soc. Med. Biol. Milanese 1910. fasc. 1°.

(4) Mette conto di far notare di sfuggita che l'alterato comportamento del latte soverchiamente sterilizzato di fronte all'azione proteolitica dei fermenti lattici è valido argomento per dimostrare che in detto latte si verificano modificazioni sostanziali tali da sconsigliarlo per l'uso alimentare massime dei bambini e dei malati.

perature inferiori ai 100° C., come si usa col siero di sangue; ma in tal caso occorrerebbe valersi di latte munto asetticamente. In ogni modo poi il latte sterilizzato bianco richiede di essere controllato rigorosamente rispetto alla sua amicrobicità.

Solamente quando, colla scorta degli accorgimenti tecnico-culturali che sono scaturiti dalle mie ricerche, si sia arrivati a sviscerare e ad attivare i poteri proteolitici di un dato fermento lattico, sarà concesso di differenziarlo dagli altri, di *selezionarlo* e di apprezzarne e sfruttarne il valore sia a scopo agricolo-industriale sia a scopo medico, dove pure s' impone di tener conto non solamente del potenziale acidificante ma altresì dei prodotti di proteolisi (albumosi, peptoni, aminoacidi ecc.) dei fermenti impiegati.

Matematica. — *Sulle trasformazioni asintotiche delle curve* (¹). Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (²).

1. Il prof. Bianchi in una sua Memoria (³) ha dato le formole che esprimono le trasformate asintotiche d'una curva (§ 1), considerando poi fra queste quelle che rientrano nelle trasformazioni di Bäcklund delle curve a torsione costante (§ 11). Il Picone (⁴) riotteneva queste ed altre proprietà dalle più generali trasformazioni asintotiche (B_k) che lasciano in ogni punto invariata la torsione, seguendo però una via più complicata. Ora tutte queste proprietà possono benissimo dedursi molto più semplicemente, seguendo la via stessa del Bianchi e senza introdurre la flessione della curva, col calcolo vettoriale assoluto. È già stato mostrato (⁵) come questo permetta di ridurre la cit. Memoria del Bianchi. In questa Nota (nn. 2 e 3) completo quanto trovasi negli *Elementi* ora cit., precisando con maggior rigore il detto § 1 del Bianchi, deducendo poi rapidamente le proprietà del Picone. Infine, come es., mi è parso utile mostrare (n. 7) come si ottengano facilmente tutte le asintotiche del conoide retto.

(¹) Lavoro eseguito nella R. Università di Messina.

(²) Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1917.

(³) L. Bianchi, *Sulle configurazioni mobili di Möbius nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*, Rendic. del Circ. matem. di Palermo, tomo XXV (1° sem. 1908), pp. 291-325.

(⁴) M. Picone, *Intorno alle trasformazioni asintotiche delle curve e complementi alla Memoria « Sulle congruenze rettilinee W »*, ibidem. tomo XXXIX (1° sem. 1915), pp. 51-73.

(⁵) Burali-Forti C. e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria*, ecc. (Bologna, Zanichelli, 1909), pag. 85.

2. Se $\mathbf{u}$ è un vettore funzione di t, il punto P tale che, per $\varepsilon = \pm 1$,

$$(1) \qquad P' = \varepsilon \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}\,, \quad \text{ossia} \quad P = O + \varepsilon \int \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}\, dt\,,$$

(essendo O un punto fissato ad arbitrio) descrive una linea la cui binormale in P è parallela ad $\mathbf{u}$, ed il cui raggio di torsione τ (positivo pe $\varepsilon = +1$, negativo per $\varepsilon = -1$) vale

$$(2) \qquad \tau = \varepsilon \mathbf{u}^2\,.$$

Dato il vettore $\mathbf{u}$, la linea P è determinata a meno d'una traslazione, ed inversamente data la P il vettore $\mathbf{u}$ è determinato a meno del segno. Se P è punto funzione data di t, allora la 1ª delle (1) (equazione differenziale in $\mathbf{u}$) secondochè, in tutto il campo di t, $P' \wedge P'' \times P''' \gtrless 0$, ha per soluzione $\mathbf{u} = -\varepsilon(\pm P' \wedge P'' \times P''')^{-\frac{1}{2}} P' \wedge P''$.

Infatti dev'essere $\mathbf{u} = h P' \wedge P''$, da cui

$$\mathbf{u}' = h' P' \wedge P'' + h P' \wedge P''' \; ; \; \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} = -h^2 . P' \wedge P'' \times P''' . P'\,.$$

3. Si chiama « trasformata asintotica d'una linea gobba P » ogni linea P_1 tale che P, P_1, funzioni *distinte* della stessa variabile t, sono asintotiche (curvilinee) della rigata PP_1. Va notato che siccome ogni rigata sviluppabile possiede come unico sistema di asintotiche le sue generatrici la rigata PP_1 è necessariamente *gobba*.

Teorema. — *Ogni trasformata asintotica della* (1) *è definita da*

$$(3) \qquad P_1' = \varepsilon \mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_1\,,$$

ove il vettore $\mathbf{u}_1$ *soddisfa alle condizioni*

$$(4) \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}' \neq 0 \quad , \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1' \neq 0\,,$$

$$(5) \qquad \varepsilon \mathbf{u}_1' \pm \mathbf{u}' = \omega_1(\mathbf{u}_1 \mp \varepsilon \mathbf{u})\,,$$

essendo ω_1 *una funzione arbitraria di* t, *e si ha*

$$(6) \qquad P_1 = P \pm \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}\,.$$

Se ω_1 *è la derivata logaritmica della funzione* ψ_1^{ε}, *si ha*

$$(5') \qquad \mathbf{u}_1 = \psi_1 \left[\mathbf{a} \mp \varepsilon \int \psi_1^{-2} d(\psi_1 \mathbf{u}) \right],$$

ove $\mathbf{a}$ *è vettore costante arbitrario, e* ψ_1 *è funzione arbitraria* (*non nulla*) *di* t

Se δ *è la distanza dei punti* P, P_1, *e* γ *è l'angolo di* $\mathbf{u}$ *con* $\mathbf{u}_1$, *allora*

$$(7) \qquad \delta = \sqrt{\tau \tau_1}\, \mathrm{sen}\, \gamma\,.$$

Infatti, perchè P, P_1 siano asintotiche curvilinee della rigata PP_1 è necessario che $P_1 - P$ sia normale ad $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{u}_1$, cioè che si abbia

$$(a) \qquad P_1 = P + h\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u} \,,$$

ove al variare di t ed h s'ottengono tutti i punti della rigata. Perchè questa sia gobba dev'essere (1) $P' \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}) \times (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u})' = -\varepsilon(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}')^2 \neq 0$; ed analogamente per P_1, cioè sussistono le (4).

Derivando (a), e ritenuto per ora scritto $\varepsilon_1 = \pm 1$ in luogo di ε nella (3), si ha

$$(b) \qquad \varepsilon\mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_1 - \varepsilon_1\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} = h'\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u} + h\mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u} + h\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}' \,;$$

moltiplicando internamente per $\mathbf{u}$ o per $\mathbf{u}_1$ si ottiene

$$\varepsilon\mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u} = h\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}' \times \mathbf{u} \quad , \quad \varepsilon_1\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{u}_1 = h\mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{u}_1 \,,$$

da cui, per le (4), $h^2 = \varepsilon\varepsilon_1$. Perchè h sia reale dev'essere intanto, come si è posto in (3), $\varepsilon = \varepsilon_1$, cioè *le due asintotiche* P, P_1 *hanno necessariamente torsioni d'egual segno.*

Ciò essendo, si ricava $h = \pm 1$ e sostituendo allora in (b) si trae

$$(5'') \qquad (\varepsilon\mathbf{u}_1' \pm \mathbf{u}') \wedge (\mathbf{u}_1 \mp \varepsilon\mathbf{u}) = 0 \,,$$

equivalente alla (5), che è così *necessaria*. È pure *sufficiente* perchè dalla (6), tenendo conto delle (1) e combinando poi con (5″) si ha

$$P_1' = \varepsilon\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} \pm \mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u} \pm \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}' = \varepsilon\mathbf{u}_1' \wedge \mathbf{u}_2 \,.$$

Seguono subito la (5′) integrando l'equazione lineare (5); e la (7) dalla (6) per essere $\delta = \mathrm{mod}(P_1 - P)$.

Osservazione. — La linea simmetrica della P rispetto al punto fisso O, cioè $Q = 2O - P$, ha torsioni di segno opposto a quelle di P, perchè $Q' = -P' = -\varepsilon\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}$; e la simmetrica di P_1 rispetto ad O, per la (6), è $Q_1 = Q \mp \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}$ e risulta trasformata asintotica di Q. Dunque, senza nulla togliere alla generalità, τ e τ_1 *si possono supporre positivi.*

Scegliendo opportunamente il senso di $\mathbf{u}_1$ (n. 2) la (6) mostra che è lecito porre $h = 1$, cioè — come si riterrà fatto sempre per quanto segue — in tutte le formole precedenti si può scegliere il segno superiore, oltre al supporre $\varepsilon = +1$.

4. Consideriamo la trasformazione asintotica della linea P caratterizzata da

$$(8) \qquad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}_1^2 \qquad \text{(equivalente a } \tau_1 = \tau).$$

(1) C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva* (Torino, Gallizio, 1912), n. 167, pag. 142.

Moltiplicando internamente per $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}$ la (5), per la (8) si ha

$$0 = (\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}') \times (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}[(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u})^2]' ,$$

da cui risulta, indicando con k una costante positiva

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u})^2 = 2k . \tag{9}$$

La costante k di Picone (loc. cit., pag. 59) riceve così un significato geometrico semplice che ne rende evidenti tutte le sue proprietà. Essa permette di esprimere la distanza $\delta = \mathrm{mod}(P_1 - P)$, e l'angolo dei due piani osculatori $\gamma = \mathrm{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$, poichè tenendo conto delle (8), (9), (7) si ha subito

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u} = \tau \cos \gamma , \tag{10}$$

$$\tau + \tau \cos \gamma = k , \tag{11}$$

$$\cos \gamma = \frac{k}{\tau} - 1 , \quad \mathrm{sen}\, \gamma = \frac{1}{\tau} \sqrt{k(2\tau - k)} , \quad \delta = \sqrt{k(2\tau - k)} . \tag{12}$$

La linea P_1 così caratterizzata dalla proprietà che in ogni punto ha *torsione eguale* a quella del punto corrispondente della linea P si dirà, con Picone, ottenuta con « una trasformazione B_k ». In virtù della (8) si ha subito

$$\tau' = 2\mathbf{u} \times \mathbf{u}' = 2\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_1' ; \tag{13}$$

tenendo conto di questa, se si moltiplica per $\mathbf{u}_1' - \mathbf{u}'$ la (5) si ottiene

$$\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2 = \omega_1(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u})' . \tag{14}$$

Dalla (1) segue $P'^2 = \mathbf{u}'^2 \mathbf{u}^2 - (\mathbf{u}' \times \mathbf{u})^2$ ed analogamente per P_1'; quindi per la (8) si ha $P_1'^2 - P'^2 = \mathbf{u}_1'^2 \mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}'^2 \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}^2(\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2)$, vale a dire, per la (14)

$$P_1'^2 - P'^2 = \mathbf{u}^2(\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2) = \omega_1 \mathbf{u}^2(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \times \mathbf{u}_1)' . \tag{15}$$

In virtù delle (2), (10), (11), (12), le (14) e (15) assumono le forme

$$\mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2 = \omega_1(\tau - \tau \cos \gamma)' , \tag{14'}$$

$$P_1'^2 - P'^2 = \omega_1 \tau(\tau - \tau \cos \gamma)' . \tag{15'}$$

5. *Se in una trasformazione* B_k *uno degli elementi* τ, δ, γ *è costante, sono pure costanti gli altri due e le linee* P, P_1 *hanno eguale arco.*

La prima parte risulta subito dalle (12), e la seconda da queste e dalla (15').

6. *In una trasformazione* B_k *si conservano gli archi solamente quando*

1°) *la linea* P *è a torsione costante*;

2°) P *è asintotica d'un conoide retto, nel qual caso la detta sua trasformata secondo* B_k *è la simmetrica della* P *rispetto all'asse del conoide.*

Affinchè P, P_1 abbiano eguale arco occorre e basta, per la (15), che

$$(a) \qquad \mathbf{u}_1'^2 - \mathbf{u}'^2 = 0 .$$

1°) Sia $\omega_1 \neq 0$. Allora dalla (14') e dalla (a) si ha $\tau - \tau\cos\gamma = \text{cost}$, che sommata con la (11) dà appunto $\tau = \text{costante}$.

2°) Sia $\omega_1 = 0$. Dalla (5) si ha allora $\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}' = 0$, che integrata da

$$(b) \qquad \mathbf{u}_1 + \mathbf{u} = 2a\mathbf{k} ,$$

ove $\mathbf{k}$ è vettore unitario costante ed a è un numero reale costante. Da questa si ha $\mathbf{u}_1 = 2a\mathbf{k} - \mathbf{u}$; quadrando e sommando, in virtù della (8), si ottiene

$$(c) \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \pm a .$$

Dalla stessa (b) si ha ancora

$$(d) \qquad \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u} = 2a . \mathbf{k} \wedge \mathbf{u} \quad , \quad P_1 = P + 2a\mathbf{k} \wedge \mathbf{u} .$$

Se P_0 è punto medio fra P e P_1 si ha $P_0 = P + a_0\mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$, da cui $P_0' = \mathbf{u}' \wedge (\mathbf{u} - a\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \wedge P_0' = (\mathbf{k} \times \mathbf{u} - a)\mathbf{u}'$ e, per la (c), $\mathbf{k} \wedge P_0' = 0$. Dunque il punto P_0 descrive una retta parallela al vettore $\mathbf{k}$, cioè la rigata PP_1 è un conoide (di asse $P_0\mathbf{k}$) *retto* perchè, in virtù della (d), $(P_1 - P) \times \times \mathbf{k} = 0$. L'inverso è evidente.

7. Si possono ottenere in modo assai semplice tutte le asintotiche d'un conoide retto.

Sia $\mathbf{k}$ un vettore unitario costante; $\mathbf{i}$ vettore unitario funzione di t normale a $\mathbf{k}$; si ponga $m = \text{mod}\, \mathbf{i}'$, $\mathbf{j}' = -\mathbf{i}'/m$, ed il verso di $\mathbf{k}$ sia tale che $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$. Si avrà $\mathbf{i}' = -m\mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{i})' = m\mathbf{i}$. Ciò posto, per il punto generico P del conoide retto di asse $O\mathbf{k}$, si ha

$$(\alpha) \qquad P = O + t\mathbf{k} + x\mathbf{i} ;$$

$$(\beta) \qquad P' = \mathbf{k} + x'\mathbf{i} - mx\mathbf{j} ,$$

avendo supposto x funzione di t. Ora perchè in questa ipotesi la linea P sia una asintotica, dev'essere $\mathbf{u}$ normale ad $\mathbf{i}$, e per la (c) del n. 6, $\mathbf{k} \times \mathbf{u} = = \text{costante}$, vale a dire $\mathbf{u} = h\mathbf{j} + a\mathbf{k}$, e quindi $P' = \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u} = ah'\mathbf{i} + mh^2\mathbf{k} - - ahm\mathbf{j}$, che confrontata con ($\beta$) dà $mh^2 = 1$, $h = 1/\sqrt{m}$, $x = a/\sqrt{m}$, e quindi le asintotiche del conoide son descritte dai punti

$$(\gamma) \qquad P_a = O + t\mathbf{k} + a/\sqrt{m}\,\mathbf{i}, \quad \text{con} \quad m = \text{mod}\, \mathbf{i}' ,$$

essendo $\mathbf{i}$, con $\mathbf{i} + \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i}^2 = 1$, funzione di t. Per $a = 0$ si ha l'asse $O\mathbf{k}$ del conoide.

Dall'espressione di $\mathbf{u}$ e per la (2) si ha subito

$$(\varepsilon) \qquad \tau = \frac{1}{m} + a^2 .$$

Dalla (γ) segue subito il notevole teorema: *Se* P_a, P_b *sono asintotiche, allora il baricentro dei punti* P_a, P_b *con le masse* r, s $(r + s \neq 0)$ *descrive l'asintotica* P_c *con* $c = (ra + sb)/(r + s)$.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 8°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 4.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 9.

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 novembre 1917.

Volume XXVI.° — Fascicolo 9°

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 novembre 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione nel quale sussistono dei moti interni variabili.* Nota di Orazio Lazzarino, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In due Note precedenti ho studiato, per via intrinseca, il moto di rotazione di un sistema che si suppone sottratto all'azione di forze esterne e nel quale sussistono dei moti interni stazionarî [2].

In questa Nota mi propongo di dimostrare come, partendo dall'integrale delle aree sotto la forma più generale da me trovata, si possa studiare con estrema semplicità il caso della rotazione di un *corpo di rivoluzione* nel quale sussistano dei *moti interni variabili*, tali però che non alterino nè la forma nè la distribuzione di densità del corpo.

Di questo caso, particolarmente interessante per le applicazioni ai moti del polo terrestre, si sono occupati i proff. V. Volterra [3] e G. Peano [4], dei quali ritrovo anche, per via più semplice, i principali risultati teorici.

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1917.

[2] Lazzarino, *Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionari*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1917; *Assi permanenti nel moto di rotazione di un corpo* ecc., id., 2° sem. 1917.

[3] V. Volterra, *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre*, Astron. Nachrichten, Bd. 138, n. 3291-92; *Sur la théorie des variations des latitudes*, Acta Mathematica, t. XXII: *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1895, pag. 107 e 1° sem. 1896, pag. 4.

[4] G. Peano, *Sopra lo spostamento del polo sulla terra*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, t. XXX, pag. 515 (1894-95); *Sul moto del polo terrestre*, id., t. XXX,

1. Ho precedentemente dimostrato che, nel moto di rotazione di un corpo sottratto all'azione di forze esterne e nel quale sussistono dei moti interni anche variabili, tali però che non alterino nè la forma nè la distribuzione di densità del corpo, sussiste l'integrale delle aree e può scriversi sotto la forma notevole

$$\alpha\Omega + \mathbf{M}_i = \mathbf{K} \tag{1}$$

dove α è l'omografia d'inerzia del sistema rispetto al baricentro O di questo; Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione intorno ad O; $\mathbf{M}_i$ il momento, rispetto ad O, dell'impulso dovuto ai moti interni; $\mathbf{K}$ un *vettore costante* ([1]) che rappresenta il momento, rispetto ad O, dell'impulso totale del sistema e che è completamente determinato, in grandezza, direzione e verso, quando sian date le condizioni iniziali che determinano il moto.

Se l'ellissoide centrale d'inerzia si riduce ad un ellissoide di rivoluzione intorno ad uno dei suoi assi principali, per es. $O\mathbf{k}$, questo asse diventa un elemento intrinseco del sistema e due dei momenti principali di inerzia risultano eguali fra loro.

Siano A, B, C tali momenti; supponendo $A = B$ ed indicando con ε lo schiacciamento polare, ponendo cioè $\varepsilon = (C - A)/A$, l'omografia α di inerzia assume la forma ([2])

$$\alpha = A + (C - A) \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A[1 + \varepsilon H(\mathbf{k}, \mathbf{k})] \tag{2}$$

da cui si deduce ([3])

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{A}\left[1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} H(\mathbf{k}, \mathbf{k})\right]. \tag{3}$$

---

pag. 845; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1895, pag. 281; *Sul moto del polo terrestre*, id., 1° sem. 1896, pag. 163.

([1]) Giova osservare che le espressioni « *vettore costante* » e « *vettore funzione del tempo* » significano, nel comune linguaggio cartesiano, vettori le cui coordinate, *rispetto ad assi fissi, nella comune accezione meccanica dell'appellativo fisso*, sono rispettivamente « *costanti* » e « *funzioni del tempo* ».

([2]) Infatti, indicando con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ le direzioni unite della dilatazione α, si ha

$$\alpha = H(\mathbf{i}, \alpha\mathbf{i}) + H(\mathbf{j}, \alpha\mathbf{j}) + H(\mathbf{k}, \alpha\mathbf{k}) = A[H(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + H(\mathbf{j}, \mathbf{j})] + C \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) =$$
$$= A[1 - H(\mathbf{k}, \mathbf{k})] + C \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A + (C - A) \,.\, H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \qquad \text{c. d. d.}$$

([3]) Considerando, più generalmente, l'omografia $\alpha_1 = A[1 + \varepsilon H(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$, e indicando con $\mathbf{x}$ un vettore unitario qualsiasi e ponendo $\alpha_1 \mathbf{x} = \mathbf{y}$, si ha

$\mathbf{y} = A(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{x} \,.\, \mathbf{b})$ da cui si ricava: (*a*) $\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{x} \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{y}/A$.

Moltiplicando la (*a*) scalarmente per $\mathbf{a}$, si deduce $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{y}) / A(1 + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ e, sostituendo nella (*a*), si trae:

$$\mathbf{x} = 1/A\left[\mathbf{y} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{b}} \mathbf{a} \times \mathbf{y} \,.\, \mathbf{b}\right] = 1/A\left[1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \mathbf{a} \times \mathbf{b}} H(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right]\mathbf{y}$$

da cui segue la (3) ponendo $\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

In questo caso, tenendo conto della (2), la (1) può scriversi

$$(1') \qquad A(\Omega + \varepsilon \Omega \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k}) + \mathbf{M}_i = \mathbf{K}$$

da cui si ricava immediatamente

$$(4) \qquad \mathbf{M}_i = \mathbf{K} - A(\Omega + \varepsilon \Omega \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k}) \,.$$

Inoltre, la velocità dell'asse O**k** d'inerzia è data da

$$(5) \qquad d\mathbf{k} / dt = \Omega \wedge \mathbf{k}$$

che è un'equazione lineare e può quindi integrarsi facilmente [1].

Applicandovi lo sviluppo in serie indicato dal Peano [2] e ponendo $\Omega \wedge = \beta$, si ha

$$(6) \qquad \mathbf{k} = \left[1 + \int \beta \, dt + \int \beta \, dt \int \beta \, dt + \cdots \right] \mathbf{k}_0$$

dove β è una omografia funzione integrabile del tempo e $\mathbf{k}_0$ è la posizione del vettore **k** per $t = 0$. La (6) è una serie sempre convergente e permette di determinare completamente, quando sia noto il vettore Ω in funzione del tempo, il vettore **k** e quindi l'asse O**k** d'inerzia ed il punto $O + \mathbf{k}$ che è il polo d'inerzia. Si può dunque concludere che « *quando sia noto, in* « *funzione del tempo, il vettore* Ω *che rappresenta la velocità istantanea* « *di rotazione del sistema, e sian date le condizioni iniziali del moto* « *che determinano completamente il vettore* **K** *costante* (*fisso nello spazio*), « *le formole* (6) *e* (4) *permettono di determinare, in funzione del tempo,* « *la posizione del polo* $O + \mathbf{k}$ *d'inerzia ed il momento* $\mathbf{M}_i$ *dell'impulso* « *dovuto ai moti interni* ».

2. Risolvendo, invece, la (1) rispetto ad Ω, si ha

$$(7) \qquad \Omega = \alpha^{-1} (\mathbf{K} - \mathbf{M}_i)$$

ossia, per la (3),

$$(7') \qquad \Omega = \frac{1}{A} \left[(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k} \right].$$

Questa relazione esprime che « *la velocità istantanea di rotazione del* « *sistema è la risultante di due velocità, una diretta secondo il vettore* « $\mathbf{K} - \mathbf{M}_i$ *e l'altra secondo l'asse* O**k** *d'inerzia* ».

Inoltre, sostituendo nella (5) l'espressione (7′) di Ω, si ha la relazione

$$(8) \qquad d\mathbf{k}/dt = (1/A)\,(\mathbf{K} - \mathbf{M}_i) \wedge \mathbf{k}$$

[1] Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Paris 1887, Chap. II.

[2] G. Peano, *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*, Atti della R. Accad. di Torino, a. 1887; Mathem. Annalen, t. 32, pag. 450.

dove non figura affatto lo schiacciamento polare ε. Si può quindi dire che « *nel caso in esame, la velocità dell'asse* Ok *d'inerzia è indipendente dallo schiacciamento polare* ».

Essendo anche la (8) un'equazione lineare, si può ad essa applicare il procedimento d'integrazione sopra indicato e, ponendo $(1/A)(K - M_i) \wedge = \gamma$, si ha

$$\mathbf{k} = \left[1 + \int \gamma\, dt + \int \gamma\, dt \int \gamma\, dt + \cdots \right] \mathbf{k}_0 \tag{9}$$

dove $\mathbf{k}_0$ ha lo stesso significato di prima e γ è una omografia funzione integrabile del tempo.

Si può dunque concludere che « *supposto noto il vettore* M_i, *qualunque* « *esso sia, in funzione del tempo, ed il vettore* K *costante e fisso nello* « *spazio, si può, mediante la* (9), *determinare* $\mathbf{k}$ *e quindi il polo* $O + \mathbf{k}$ « *d'inerzia del sistema; onde resta in seguito determinato, per la* (7'), « *il vettore* Ω, *cioè la velocità istantanea di rotazione del corpo, in fun-* « *zione del tempo* ».

3. Supponendo ora il vettore M_i costante e fisso nello spazio, sarà pure tale il vettore $K - M_i$ che indico con K_1; allora la (4) porge

$$\Omega + \varepsilon \Omega \times \mathbf{k} . \mathbf{k} = K_1 / A \tag{4'}$$

cioè « *durante la rotazione del corpo, risulta sempre costante in gran-* « *dezza, direzione e verso la somma geometrica del vettore* Ω *e della pro-* « *iezione di* $\varepsilon\Omega$ *sull'asse* Ok *d'inerzia* ».

Inoltre la (7') e la (8) dànno, in questo caso, rispettivamente

$$\Omega = \frac{1}{A}\left(K_1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} K_1 \times \mathbf{k} . \mathbf{k}\right) \tag{7''}$$

$$d\mathbf{k}/dt = (1/A)\, K_1 \wedge \mathbf{k} . \tag{8'}$$

Integrando la (8') si ha la posizione dell'asse Ok d'inerzia e quindi, per la (7''), si può determinare, in funzione del tempo, il vettore Ω, quando sia noto il vettore K_1.

Si può inoltre osservare che, essendo $\mathbf{k}$ un vettore unitario, la (8') esprime che *il polo d'inerzia* $O + \mathbf{k}$ (*e quindi l'asse* Ok) *ruota, con ve-* « *locità angolare costante ed eguale a* $(\mathrm{mod}\, K_1)/A$, *intorno all'asse* OK_1 « *che è fisso nello spazio, descrivendo così, con moto uniforme, un cono* « *di rivoluzione intorno a questo asse* ».

Supponendo poi $M_i = 0$ (caso del corpo completamente rigido), si ha $K_1 = K$ e valgono evidentemente le formole (4'), (7'') e (8') ove si sostituisca K al posto di K_1. Si può quindi concludere che « *un corpo nel cui* « *interno sussistano dei moti ciclici tali che il loro momento d'impulso,*

« *rispetto al baricentro del sistema, risulti costante* (*nello spazio*), *si* « *comporta in modo perfettamente analogo ad un corpo completamente* « *rigido* ».

4. È infine interessante osservare che si può facilmente trovare una semplice rappresentazione del moto dell'asse $\mathbf{Ok}$ e quindi del polo $O+\mathbf{k}$ d'inerzia. Infatti la (8) porge

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt}=\frac{1}{A}\mathbf{K}\wedge\mathbf{k}-\frac{1}{A}\mathbf{M}_i\wedge\mathbf{k} \tag{10}$$

cioè « *la velocità del polo* $O+\mathbf{k}$ *d'inerzia è la risultante di due velo-* « *cità: una, di grandezza* $(1/A)\operatorname{mod}\mathbf{K}$, *intorno all'asse* OK, *e l'altra,* « *di grandezza* $-(1/A)\operatorname{mod}\mathbf{M}_i$, *intorno ad* OM_i ». Supponendo ora impressa al polo $O+\mathbf{k}$ una rotazione costante ed eguale a $-(1/A)\operatorname{mod}\mathbf{K}$ intorno ad OK ed indicando con $\mathbf{k}_1$ ed $\mathbf{M}_{i_1}$ ciò che diventano i vettori $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{M}_i$ per effetto di questa rotazione, dalla (10) si ricava subito

$$d\mathbf{k}_1/dt=-(1/A)\,\mathbf{M}_{i_1}\wedge\mathbf{k}_1 \tag{11}$$

che esprime l'effetto dovuto esclusivamente all'impulso $\mathbf{M}_{i_1}$ dei moti interni.

Nel caso di $\mathbf{M}_{i_1}=0$, dalla (11) risulta $\mathbf{k}_1=$ costante. Supponendo invece $\mathbf{M}_{i_1}=$ costante, la (11) esprime che il punto $O+\mathbf{k}_1$ ruota con velocità costante ed eguale a $-(1/A)\operatorname{mod}\mathbf{M}_{i_1}$ intorno ad OM_{i_1} e descrive una circonferenza col centro sull'asse OM_{i_1}.

Supponendo inoltre che OM_{i_1} sia normale ad OK e che l'asse $\mathbf{Ok}$ di inerzia coincida inizialmente con OK, allora il punto $O+\mathbf{k}_1$ descriverà con moto uniforme la circonferenza massima della sfera di raggio unitario che passa per OK.

Per avere quindi il moto del polo $O+\mathbf{k}$, basta ricomporre i due moti nei quali lo si è scomposto, supporre cioè che « *esso descriva con moto* « *uniforme la circonferenza massima passante per* OK, *mentre questa* « *ruota con moto uniforme intorno ad* OK ».

Risulta adunque che « *in questo caso, il polo d'inerzia si allontana* « *con moto uniforme dall'asse dell'impulso totale del sistema e passa dalle* « *regioni polari alle equatoriali* ».

Chimica. — *Sul prodotto di isomerizzazione del carvone alla luce. Carvoncanfora* [1]. Nota II di E. Sernagiotto, presentata dal Socio G. Ciamician [2].

Proseguendo nelle indagini sulla costituzione della carvoncanfora [3] mi occupai del comportamento della sua ossima di fronte agli agenti capaci di produrre delle isomerizzazioni nei composti contenenti il gruppo ossimico.

Scartati gli acidi solforico e cloridrico concentrati ed il cloruro di acetile, che mi portarono a prodotti in gran parte resinificati, ottenni migliori risultati facendo reagire l'ossima della carvoncanfora con l'acido solforico diluito nelle condizioni indicate da Tiemann per la preparazione del nitrile canfolenico, partendo dalla canforossima, e dal pentacloruro di fosforo, in condizioni analoghe a quelle sperimentate per la mentonossima e simili [4].

Scaldando a bagno-maria l'ossima con acido solforico al 20 %, ottenni come prodotto di idrolisi, con resa quasi teorica, la isocarvoncanfora, identificata a mezzo del semicarbazone fondente a 209° che, analizzato, diede:

Trovato N % 20,52. Calcolato per $C_{11}H_{17}N_3O$, N % 20,30

Questo isomero non saturo si forma pure dalla carvoncanfora per azione dell'acido solforico concentrato in soluzione alcoolica [5].

Trattando invece l'ossima con pentacloruro di fosforo, in soluzione cloroformica, ebbi, come principale prodotto della reazione, il 2-clorocimolo, bollente a 175° sotto la pressione di 37 mm., e che, analizzato, diede:

Trovato	C % 71,09;	H % 8,16
Calcolato per $C_{10}H_{13}Cl$;	C % 71,17;	H % 7,77.

Come appare dai fatti suesposti, l'ossima della carvoncanfora si comporta di fronte agli agenti isomerizzanti in modo che trova riscontro in casi analoghi [6].

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1917.

(3) Ciamician e Silber, R. A. L., vol. 17, 1° sem. (1908), pag. 581; Ber., vol. 41, pag. 1931; Sernagiotto, R. A. L., vol. 23, 2° sem., pag. 70.

(4) Bekmann e Mehrländer, A. 289, pag. 388; Ber. 20, pag. 1508 (1887); Wallach, A. 277, pag. 156; A. 278, pag. 304.

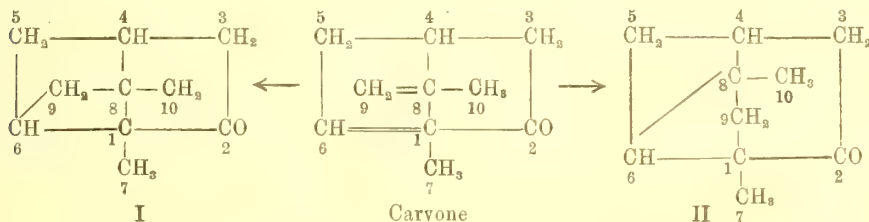
(5) Sernagiotto, loc. cit.

(6) Per la descrizione più dettagliata della parte sperimentale, vedasi nella Gazzetta chimica italiana.

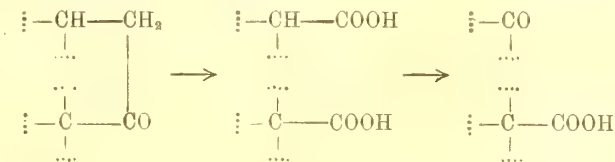
Le osservazioni finora raccolte sul modo di comportarsi e di reagire della carvoncanfora e dei suoi derivati permettono di risalire con sufficiente sicurezza alla sua formola di costituzione.

Ciamician e Silber [1] hanno già fatto l'ipotesi che l'isomerizzazione del carvone alla luce si compiesse con un meccanismo analogo a quello per cui dall'acido cinnamico si passa all'acido trussilico e cioè per la formazione di un nucleo tetrametilenico derivante dalla reciproca saturazione delle valenze impegnate nei doppî legami.

Invero la molecola del carvone contiene due doppî legami in posizione tale da poter dare luogo ad una isomerizzazione di questo tipo, portante ad un composto completamente saturo, come infatti si dimostrò essere la carvoncanfora, cui possono essere attribuite *a priori* una delle due seguenti formole:

```
 5        4        3         5        4         3         5        4          3
CH2------CH------CH2        CH2------CH-------CH2        CH2------CH---------CH2
|         |        |        |         |         |        |         |           |
| /CH2 - C - CH2   |  <---  |   CH2 = C - CH3   |  --->  |      / 8C - CH3     |
|/ 9    8|  10     |        |   9    8|  10     |        |     /   |   10      |
CH-------C-------CO         CH=======C--------CO         |    /   9CH2         |
6       1|        2         6       1|         2         |   /     |           |
        CH3                         CH3                  CH--------C----------CO
         7                           7                   6        1|           2
         I                        Carvone                         CH3
                                                         II         7
```

L'esistenza di un derivato ossimico e di un semicarbazone dell'isomero dimostrano che in questo si è mantenuto inalterato il gruppo carbonilico, ed il fatto che da esso si derivi, per ossidazione blanda con permanganato, un acido bibasico di formola $C_{10}H_{14}O_4$, attesta che il carbonile fa ancora parte dell'aggruppamento $\begin{matrix}-CH_2\\ |\\ -CO\end{matrix}$ già esistente nel carvone. Anche la canfora, la quale ha una simile disposizione nella propria molecola, dà con facilità l'acido canforico bibasico, con numero di atomi d'idrogeno eguale a quello del composto chetonico, e da cui, per ossidazione ulteriore, si deriva un acido monobasico e chetonico, avente un atomo in meno, l'acido canforonico.

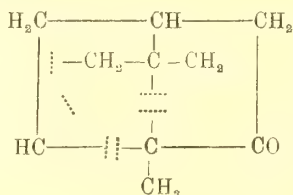
Egualmente si comporta l'acido bibasico corrispondente alla carvoncanfora, il quale, ossidato, perde un carbonile, trasformandosi in un cheto-acido avente un atomo di carbonio in meno. Si può dedurre da ciò che nella sua molecola vi sia ancora, in posizione 3, l'atomo di carbonio terziario esistente nella molecola del carvone. La genesi dei due acidi è quindi conseguenza della seguente disposizione atomica:

```
⋮—CH——CH2          ⋮—CH——COOH          ⋮—CO
   |    |              |                   |
  ....  |              ....                ....
        |    --->               --->
  ...   |              ....                ....
   |    |              |                   |
⋮—C————CO          ⋮—C————COOH         ⋮—C——COOH
   |                   |                   |
  ....                ....                ....
```

[1] Ciamician e Silber, loc. cit.

Anche il metile e l'isopropile esistenti nel carvone rimangono inalterati e conservano la loro posizione relativa 1-4 nel processo di isomerizzazione, quantunque la sparizione dei doppî legami e la formazione di nuovi nuclei leghino gli atomi di carbonio del secondo, cosa che non impedisce che esso riappaia col metile nel 2-clorocimolo prodotto dall'azione del pentacloruro di fosforo sull'ossima della carvoncanfora, genesi che trova riscontro in quella per cui, sotto l'azione dei disidratanti, la canfora si trasforma in cimolo.

Questa reazione si compie per azione del cloruro di zinco [1] del pentacloruro di fosforo [2] e del pentossido di fosforo [3]. La formazione del clorocimolo dev'essere preceduta dal ripristino dell'isopropile nella posizione in cui esisteva nel carvone e conseguentemente dei doppî legami, dopo di che è facile il passaggio dalla forma idroaromatica a quella aromatica, come avviene nella riduzione della carvossima, che si trasforma in amidotimolo; e, con maggior analogia, nell'azione del pentacloruro di fosforo sul carvenone, il quale si trasforma così in 2-clorodiidrocimolo, il quale si trasforma poi in 2-clorocimolo [4].

Da ciò, l'esistenza nella carvoncanfora della seguente serie di atomi di

```
H2C-----------CH-----------CH2
 |             |             |
 | : —CH2—C —CH3             |
 |             |             |
 |    \      ......          |
 |           ......          |
 |             |             |
HC--------¦¦—C--------------CO
               |
              CH3
```

carbonio, già facente parte della molecola del carvone.

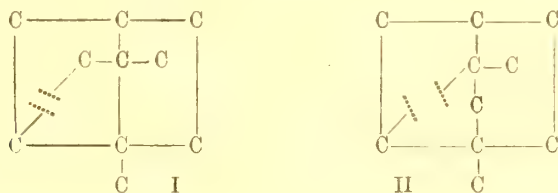
Altri fatti permettono di completare la visione dell'edificio molecolare di questo interessante isomero:

Per azione dell'acido solforico concentrato, in soluzione alcoolica e a freddo, sulla carvoncanfora, come pure nell'ossidazione con la miscela di Beckmann dell'alcool corrispondentele ed in fine per trattamento della ossima con acido solforico diluito a caldo, si origina in isomero di natura chetonica, non saturo, il quale ha un solo doppio legame, facilmente saturabile con idrogeno in presenza di palladio finamente suddiviso, e che, per ossidazione, origina notevoli quantità di acido levulinico. Questa nuova isomerizzazione, ottenibile in varî modi, dimostra l'esistenza, in una molecola capace di trasformarsi siffattamente in simili condizioni, di un aggruppamento piut-

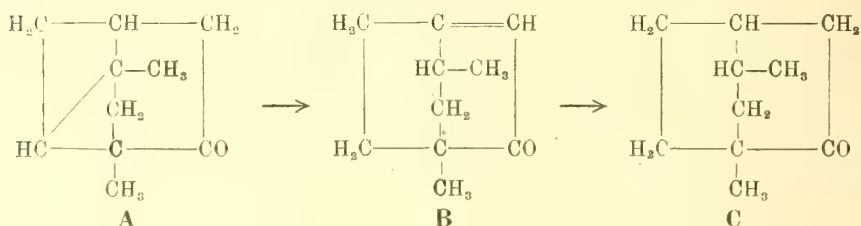
[1] Gerhardt, A., 48, pag. 234; Riche e Berard, A., 133, pag. 54.
[2] Louginine e Lippmann, B., 7, pag. 374.
[3] Kekule e Pott, B., 2, pag. 121; Pott, B., 5, pag. 265.
[4] Klage e Kraith, B., 32, pag. 2550.

tosto instabile. È noto d'altra parte che molti composti idroaromatici, aventi anelli tri- o tetrametilenici, si isomerizzano facilmente sotto l'azione degli acidi; ed infatti il carvopinone dà in queste condizioni origine al carvone, ed il carone si trasforma in carvenone.

Entrambe le formole prevedibili ormai per la carvoncanfora hanno di tali aggruppamenti, e la seconda di esse, inoltre, ne presenta uno perfettamente paragonabile a quello del carvopinone, interessante l'atomo centrale del gruppo isopropilico, che è pure in gioco nel caso del carone. Il fatto che l'isomero non saturo dia per ossidazione acido levulinico in quantità notevole, mentre la carvoncanfora, nelle stesse condizioni, non ne produce affatto, porta a concludere che l'apertura dell'anello avvenga in modo da lasciare nella molecola una serie di 5 atomi di carbonio senza doppî legami o catene laterali, facente capo al metile già esistente, poichè diversamente non sarebbe probabile la formazione dell'acido levulinico in un processo di blanda ossidazione. Tale aggruppamento si forma appunto quando, nell'isomerizzazione, si rompa il legame che unisce l'atomo di carbonio in posizione 6 all'isopropile. Per le due formule possibili le conseguenze sarebbero quelle dimostrate dallo schema seguente:

```
C———————C—————C          C———————C—————C
|       |     |          |       |     |
|   ,C—C—C    |          |      ,C—C   |
|  /    |     |          | \/   |      |
| /     |     |          |  \   C      |
|/      |     |          |/     |      |
C———————C—————C          C—— ——C—————C
        |                       |
        C    I           II     C
```

La rottura del nucleo, come ebbi ad esporre, avviene con la formazione di un doppio legame. Per la prima formula, qualsiasi fosse la posizione in cui questo si stabilisse, si dovrebbe avere per saturazione di questo con due atomi di idrogeno, la formazione della comune canfora, la quale non differirebbe da questo isomero altro che per essere completamente satura. Ammettendo invece, colla seconda formula, che nella molecola in esame esista il ponte 6-8 facilmente isomerizzabile ed analogo a quelli che hanno la stessa proprietà nel carone e nel carvopinacone, la sua rottura avverrebbe, come sempre in questi casi, con formazione di un doppio legame fra il carbonio terziario più vicino ed uno secondario attiguo a questo, e l'isomero differirebbe nella disposizione degli atomi di carbonio, dalla canfora comune, ed avrebbe una serie di atomi di carbonio tale da permettere la facile formazione dell'acido levulinico nell'ossidazione. Da quanto precede, appare probabile che la formula della carvoncanfora sia (A) e conseguentemente quella dell'isomero (B), da cui per idrogenazione si ottiene un chetone

saturo di formula $C_{10}H_{16}O$ diverso dalla canfora, quantunque biciclico (C):

```
H2C——CH——CH2         H2C——C══CH          H2C——CH——CH2
|     |     |          |    |    |          |    |     |
|    C—CH3  |          |  HC—CH3 |          |  HC—CH3  |
|  /  |     |   ——>    |    |    |   ——>    |    |     |
| /  CH2    |          |   CH2   |          |   CH2    |
|/    |     |          |    |    |          |    |     |
HC———C——————CO         H2C——C————CO         H2C——C—————CO
      |                     |                    |
     CH3                   CH3                  CH3
      A                     B                    C
```

Riassumendo in uno specchio la genesi della carvoncanfora e dei suoi derivati, avremo:

```
                         CH2——CH——CH2
                         |    |     |
                         |   C—CH3  |
                         |    ||    |
                         |   CH2    |
                         |          |
                         CH══C——————CO
                             |
                            CH3
                          Carvone
                             |
                             v

CH2——CO        CH2——CH—COOH      CH2——CH——CH2       CH2——CH——CH2        CH══C——CH
|    |         |     |           |     |     |       |     |     |       |   |    ||
|  C—CH3  <——  |   C—CH3   <——   |   C—CH3   |  ——>  |   C—CH3   |  ——>  |CH3-C—CH3||
| /  |         | /   |           | /   |     |       | /   |     |       |   H    ||
|/  CH2        |/   CH2          |/   CH2    |       |/   CH2    |       |        ||
CH——C—COOH     CH——C——COOH       CH——C————CO         CH——C————CNOH       CH══C————CCl
     |              |                 |                   |                   |
    CH3            CH3               CH3                 CH3                 CH3
Acido chetonico  Acido bibasico   Carvoncanfora        Ossima        2 monoclorocimolo

CH2——CH——CH2        CH2——C══CH           CH2——CH——CH2
|     |     |        |    |    |           |     |     |
|   C—CH3   |        |  HC-CH3 |           |  H—C-CH3  |
|  /  |     |  ——>   |    |    |   ——>     |     |     |
| /  CH2    |        |   CH2   |           |    CH3    |
|/    |     |        |    |    |           |     |     |
CH——C——————CHOH      CH2——C————CO          CH2——C—————CO
     |                    |                      |
    CH3                  CH3                    CH3
  Alcoole          Isocarvoncafora       Diidroisocarvoncanfora

                          CH2——COOH
                          |
                          CH2——CO
                               |
                              CH3
                       Acido levulinico
```

Fisiologia. — *Influenza della temperatura sulla regolazione osmotica della rana esculenta estiva.* Nota VIII di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio LUIGI LUCIANI.

È stato constatato in questi ultimi anni che anche complessi fenomeni biologici, quali per es., il ritmo cardiaco ([1]), la frequenza della pulsazione dei vacuoli negli infusori ([2]), la contrazione muscolare (Bernstein J.; Pfluger's Arch., 122, 129, 1908) la segmentazione delle uova di rana, di riccio di mare ([3]), l'eliminazione del CO_2 nella respirazione degli animali e l'assimilazione dello stesso gas nelle piante ([4]), seguono molto approssimativamente, rispetto alla temperatura, la cosiddetta regola di van t' Hoff per la velocità delle reazioni chimiche; che cioè, in generale, per una elevazione di temperatura di 10° C. essa si raddoppia o si triplica ([5]). In base a ciò, ed in considerazione anche del fatto che mentre la velocità di una reazione chimica aumenta generalmente di circa il 10 °/₀ per ogni aumento termico di 1° C.; per la medesima elevazione di temperatura un fenomeno fisico aumenta invece solo del 2 °/₀, si è concluso per la natura prevalentemente chimica dei suddetti fenomeni vitali.

Per quanto mi consta, nessuno ha finora cercato di vedere *se il complessivo fenomeno dell'adattamento di un animale acquatico vivente ad un ambiente liquido ipertonico, mediante la regolazione osmotica del proprio sangue* (ambiente interno, Cl. Bernard), *segua, in rapporto alla temperatura, la medesima regola generale valevole per la velocità delle reazioni chimiche*, o, in altre parole, *se il fenomeno della regolazione osmotica di un animale acquatico vivente, preso nel suo insieme, si svolga su processi prevalentemente chimici, pur essendo in sè un fenomeno così evidentemente di natura fisica.*

Ho sperimentato sulle rane esculente estive tenute in soluzione Ringer ipertonica massima (Δ in media = 0°,686) alle temperature di 0°, 10°, 20°

([1]) Kanitz, Pflüger's Arch. 118, 601, 1907; Snyder, Arch. f. An. u. physiol. Physiol. Abt. 118, 1907; Americ. Journ. of Physiol., XXII, 309, 1908; Galeotti e Piccinini, Arch. di Fisiol., VIII, 337, 1910; Cesana G., Arch. di Fisiol., X, 193, 1912.

([2]) Kanitz A., Biolog. Zentralbl., XXVII, 14, 1907.

([3]) Hertwig O., Arch. f. mikr.Anat., 51, 1898; Loeb J., Pflüger's Arch. CXXIV, 411, 1908.

([4]) (Miss Matthaei, Blackmann cit. in Galeotti, loc. cit.).

([5]) Come è noto, la regola di van t' Hoff non è senza eccezioni, tanto per i valori del coefficiente termico superiore al 3 (per es., nello sdoppiamento della salicina per opera dell'emulsina Q_{10} è maggiore di 7 (reazione enzimatica), quanto per i valori inferiori al 2 (esempio nella decomposizione della fosfina $Q_{10} = 1,2$. Ad essa deve quindi attribuirsi un valore relativo (Nernst, *Traité de Chimie générale*, 2e partie, pag. 262 e segg.).

e 30° C. dopo aver soggiornato qualche tempo in acqua di condotta a quelle medesime temperature. Ciascun esperimento fu eseguito, nelle successive ore, su circa 25-30 rane dalle quali si estraevano il sangue e la linfa dei sacchi (quando c'era) che, defibrinati, servivano per le analisi. I resultati sperimentali ottenuti da circa 700 rane sono rappresentati nelle due grafiche. Nella prima di queste sono state riportate sull'ascissa le ore e sulle ordinate, anzichè i valori dei Δ del sangue, del siero e della linfa, le differenze tra questi valori e quelli del liquido ambiente ipertonico subito dopo messevi le rane, considerando *l'adattamento compiuto quando le differenze tra i suddetti valori e quelli del Δ dell'ambiente fossero ridotte a* 0 *per tutti i liquidi in esame, o che fossero ridotti a* 0 *per il sangue defibrinato e per gli altri liquidi ad un valore superiore allo* 0.

Nella seconda grafica sono poi riportati i valori della resistenza elettrica dei medesimi liquidi di cui si era determinato l'abbassamento del punto di congelazione.

Dalle esperienze suddette sono stati posti in evidenza i seguenti fatti:

1°) Le rane esculente estive immerse in soluzione Ringer ipertonica massima a 0° non riescono ad adattarsi nei limiti compatibili con la vita della maggior parte di esse. Infatti dopo 123 h., di 36 rane messe nella suddetta soluzione, solo 9 erano ancora vive e il Δ del loro sangue non riuscì a raggiungere quello dell'ambiente. A tale temperatura non si accumula linfa nei sacchi linfatici (*Animali in letargo*; *ricambio materiale ridotto al minimo*). Ciò coincide col fatto già osservato da me nelle rane esc. ibernanti tra la terra umida, nelle quali la concentrazione molecolare del sangue non arrivò mai ad un valore di Δ superiore a 0°,650 (cfr. Nota 7ª).

2°) Le rane esculente estive immerse in soluzione Ringer ipertonica a 10° C. (a tale temperatura le rane estive sono un po' torpide nei loro movimenti) si adattano ad essa entro 48 h. e precisamente nell'intervallo esistente tra le 46 e le 48 h. *Tale intervallo di tempo è relativamente indipendente dalla maggiore o minore ipertonicità della soluzione salina* (infatti la differenza esistente tra il Δ dell'ambiente esterno e quello dell'ambiente interno in due esperienze eseguite dopo 24 h., con liquido ambiente diversamente ipertonico, era la medesima). La linfa comincia a raccogliersi nei sacchi linfatici laterali in evidente quantità nell'intervallo esistente dalle 16 alle 24 h.

Dalla grafica rappresentante i valori del Δ si vede chiaramente come le concentrazioni molecolari del sangue in toto, del suo siero, e quelle della linfa dei sacchi subiscano delle alternative oscillazioni diguisachè quando l'uno è più concentrato l'altro lo è meno. A queste oscillazioni alternative nelle varie ore si intercalano dei periodi di tempo durante i quali i valori si eguagliano (punti di intersezione delle curve). Le analisi contemporanee delle conducibilità elettriche degli stessi liquidi fanno rilevare la regolarità

assai maggiore delle curve che le rappresentano. Solo il contenuto in elettroliti della linfa sembra subire delle oscillazioni più marcate. *Ciò dimostra l'importanza che hanno anche le sostanze osmoticamente attive, non elettrolite, nei fenomeni della regolazione osmotica di un animale acquatico vivente, e la partecipazione alternativa del siero e dei corpuscoli del sangue in tali fenomeni.* Dopo le 48 h. il contenuto in elettroliti dei liquidi interni comincia a decrescere. Questo fatto coincide esattamente con quanto io avevo già osservato analizzando le variazioni di conducibilità elettrica del liquido ambiente durante lunghi periodi di permanenza delle rane in esso, comparativamente alle variazioni della sua concentrazione molecolare (31 giorni e 21 giorni, cfr. Nota III).

3°) Le rane esculente estive immerse in soluzione ipertonica massima a 20° C. (rane vivaci e normali) vi si adattano in 12 h. circa, e precisamente nell'intervallo esistente tra le 10 e le 12 h. La linfa si comincia a raccogliere nei sacchi linfatici laterali dalle 8 alle 10 h. Anche in questo caso si osserva che le concentrazioni molecolari del sangue in toto, del suo siero e quelle della linfa presentano nelle successive ore dell'adattamento oscillazioni alternative intercalate da periodi di eguaglianza (punti d'intersezione delle curve).

4°). Le rane esculente estive immerse in soluzione ipertonica massima a 30° C. vi si adattano entro le prime 6 h. e precisamente nell'intervallo esistente lra le 5 e le 6 h. La linfa si comincia a raccogliere nei sacchi nell'intervallo esistente tra le 4 e le 5 h.

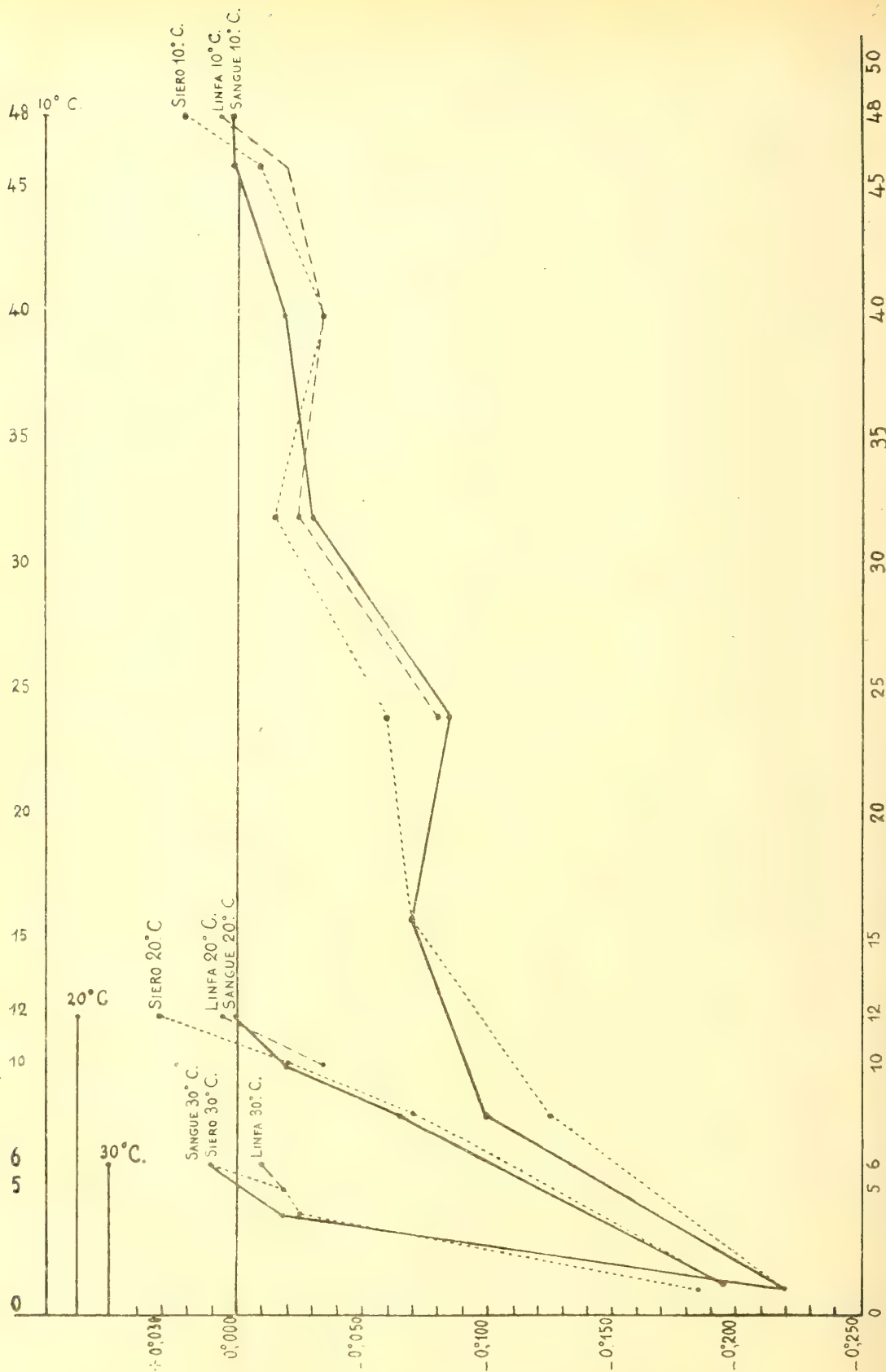
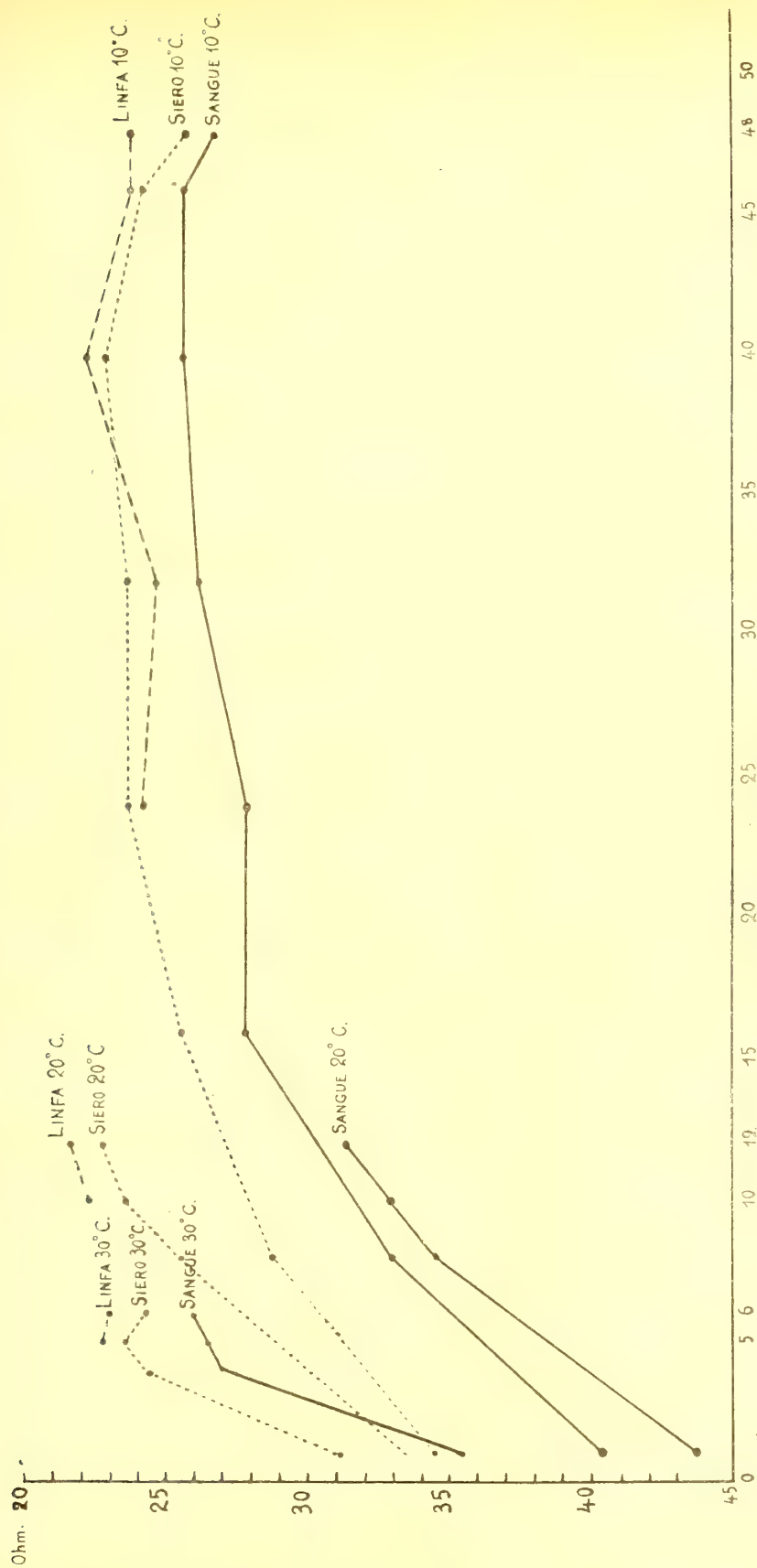
Conclusioni.

Dall'insieme delle presenti ricerche risulta dunque che le rane esculente estive si adattano ad un ambiente liquido ipertonico entro circa:

48 ore a 10° C. (ricambio più vicino a quello degli animali ibernanti)
12 " " 20° "
6 " " 30° "

che la linfa si raccoglie nei sacchi linfatici laterali entro le prime:

16-24 ore a 10° C.
8-10 " " 20° "
4-5 " " 30° "

Il fenomeno così evidentemente fisico della regolazione osmotica di un animale acquatico vivente preso dunque nel suo insieme, avendo per fondamento processi in prevalenza chimici segue, in relazione alla temperatura, assai approssimativamente la regola di van t' Hoff relativa alla velocità delle reazioni chimiche. Questa medesima regola segue la formazione della linfa e il suo accumulo entro i sacchi linfatici laterali. Basterà accennare alla importanza che questo fatto può avere nella spiegazione dei fenomeni di regolazione osmotica delle cellule viventi in generale, di quelli dell'assorbimento ecc.

Successive concentrazioni molecolari del sangue defibrinato, del suo siero, e della linfa dei sacchi di rane esclulente **estive** immerse in soluzioni Ringer ipertoniche massime a 10°, 20°, 30° C.

Successive resistenze elettriche del sangue defibrinato, del suo siero e della linfa dei sacchi di rane esculente estive immerse in soluzioni Ringer ipertoniche massime alle temperature di 10°, 20° e 30° C.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Ròiti nell'inaugurare il nuovo anno accademico porge un cordiale saluto ai Colleghi coi quali egli chiuse, nel giugno scorso, le sedute in condizioni di spirito ben diverse da quelle odierne che sono di profondo cordoglio; ma questo cordoglio non menoma affatto la fiducia viva e salda nella rivincita futura.

Il Presidente ricorda le dolorose perdite subìte dall'Accademia durante le ferie, nelle persone del Socio nazionale sen. prof. Giuseppe Veronese, che sarà degnamente commemorato nel corso della seduta, e del Socio straniero prof. Federico Roberto Helmert.

Il Corrisp. Castelnuovo dà lettura, a nome del Socio Segre, della Commemorazione del Socio sen. G. Veronese, premettendo a tale lettura le parole seguenti:

« Desidero anch'io porgere un commosso saluto alla memoria di Giuseppe Veronese che mi fu maestro venerato e carissimo. Era mia intenzione di dare oggi un rapido cenno della vita e delle opere di lui, in attesa che l'Accademia affidasse ad un Socio l'incarico di leggerne la commemorazione. Ho poi saputo che il nostro collega Segre aveva accettato di parlare dell'illustre estinto. E nessuno era adatto a questo còmpito più di lui, che aveva lavorato nello stesso campo del Veronese, e nella stessa epoca. Il Segre, dolente di non poter assistere a questa seduta, mi ha inviato il manoscritto della commemorazione che io stesso leggerò tra poco se il Presidente e l'Accademia vorranno.

« Per non ripetere notizie che l'Accademia ora ascolterà, a me non resta che aggiungere poche parole. Il Veronese ebbe due grandi ideali, la scienza e la patria; e tutto il tempo che la scienza gli lasciava libero egli volle dedicarlo a studiare e promuovere opere atte a render la patria più grande e più ricca. Nei destini d'Italia egli ebbe fede inalterabile. Fra i primi e più ferventi fautori della nostra guerra, egli ne seguiva le vicende con sicura tranquillità. La morte prematura gli risparmiò le giornate di ansia e di dolore che attraversiamo, ma lo priva pure della gioia che proveremo il giorno, speriamo prossimo, in cui il nemico sarà cacciato fuori dei confini della patria. Il Veronese fu scienziato, maestro e cittadino altamente benemerito; egli è ben degno del generale compianto che accompagnò la sua morte ».

Il Presidente s'associa alle parole del Corrisp. Castelnuovo che così felicemente lumeggiò la figura dell'estinto nostro Socio.

Commemorazione del Socio Nazionale GIUSEPPE VERONESE

DI CORRADO SEGRE.

Giuseppe Veronese nacque a Chioggia il 7 maggio 1854 da Antonio, modesto pittore decoratore, e da Ottavia Duse ([1]). Ancora giovinetto, mostrava una spiccata inclinazione per il disegno e per la pittura. Ma la mancanza a Chioggia di valenti maestri, e le condizioni disagiate della famiglia, gli tolsero di seguire quella via. Gli rimase però sempre un grande amore per l'arte; e nel seguito della sua vita, appena gli fu possibile, pur fra le altre sue occupazioni, studiò pittura, e fu, per suo diletto, pittore, e specialmente ritrattista non spregevole.

Percorse a Chioggia le scuole tecniche, e a Venezia l'istituto tecnico, dando prova di raro ingegno, apprezzato altamente dai suoi maestri, tra cui, a Venezia, il noto matematico Pietro Cassani. Per compire quegli studî dovette procurarsi i mezzi col proprio lavoro, copiando e dando lezioni ([2]). Accettò poi (1872) di andare a Vienna, come impiegato presso un'impresa per la sistemazione del Danubio, e disegnatore per l'esposizione mondiale di Vienna del 1873. Ma dopo un anno lasciò quel posto per ritornare agli studî, recandosi al Politecnico di Zurigo, a cui da molto tempo aspirava; e in quella città visse, per ragioni di economia, fra gli operai. Da prima frequentò nel Politecnico la Sezione meccanica. Poi, riconoscendo che gli studî pratici non lo interessavano, e che invece era la Matematica pura che lo attraeva, nell'estate 1875 chiese ed ottenne da W. Fiedler di passare nella Sezione matematica ([3]).

Così egli si trovò in un ambiente adatto per elevarsi negli studî, sotto un dotto maestro quale era il Fiedler. Principalmente si sentiva portato verso la geometria sintetica, proiettiva, quale appunto insegnava il Fiedler, o come trovava svolta, ad esempio, nelle lezioni di Steiner pubblicate dallo

([1]) Cugina della grande attrice Eleonora Duse. — Tolgo alcune delle notizie biografiche che seguono da un articolo dell'ing. C. Bullo pubblicato nel 1904, nell'occasione della nomina di Veronese a Senatore. Ringrazio l'amico prof. Levi-Civita per avermi comunicato quell'articolo e qualche altro utile elemento.

([2]) Nella prefazione all'estratto della sua Memoria sull'esagramma di Pascal (vedi l'elenco alla fine di questo scritto, n. 2), Veronese ringrazia il conte Nicolò Papadopoli e il suo agente generale, che contribuirono generosamente, in molte occasioni, alla sua educazione. Ed è bello vedere come, molti anni dopo, in gennaio 1911, nel cedere la presidenza dell'Istituto Veneto allo stesso conte Papadopoli, Veronese si compiacque di ricordare quest'obbligo di gratitudine, che mai non si era cancellato dall'animo suo (Atti Ist. Veneto, tomo 70, 1910-1911. pag. 28).

([3]) Queste notizie son tratte da alcune lettere di Veronese al Cremona (di cui dirò in seguito), la cui conoscenza debbo all'amico prof. Castelnuovo.

Schröter [1]. In questo indirizzo egli si occupò allora di alcuni semplici teoremi, specialmente sulle coniche, che qualche anno dopo pubblicò [n. 3] nel Giornale di Battaglini, sotto forma di enunciati, la cui dimostrazione è presentata come esercizio ai giovani lettori.

Ma una ricerca di maggior momento gli si presentava. La configurazione delle 60 rette di Pascal relative ai 60 esagoni semplici, che hanno i vertici in 6 punti di una conica, gode di proprietà notevolissime, che han condotto successivamente a considerare altri punti e altre rette; ed era stata rilevata da Hesse nel 1868 (Crelle 68, pag. 193) una corrispondenza fra le 60 rette di Pascal e i 60 punti di Kirkman, e quindi poi fra i 20 punti di Steiner e le 20 rette Cayley-Salmon, come pure fra le 15 rette di Steiner e i 15 punti di Salmon; la quale presenta, per quel che riguarda i detti elementi, i caratteri di una reciprocità. Hesse si era posta la domanda, se quella corrispondenza provenisse da una polarità; ma non era riuscito a rispondervi in modo esauriente. Schröter, nelle citate lezioni di Steiner, tra le questioni proposte al lettore, aveva presentato (a pag. 218) appunto il quesito di vedere se quella corrispondenza sia contenuta in una polarità, od almeno in una reciprocità del piano.

Veronese, leggendo l'enunciato di questo problema, si propose di risolverlo, e di trattarne in una conferenza che doveva tenere nel Seminario matematico del Politecnico. Fu così condotto ad approfondire la configurazione dell'esagramma, e a preparare quel lavoro che, poi, completato, doveva rivelare il suo nome al mondo scientifico.

Per quel che riguarda la questione di Hesse e Schröter, si ottiene una risposta negativa, che deriva dalla scoperta che Veronese fa, entro la figura dell'esagramma, di 6 configurazioni parziali π, ognuna delle quali è composta di 10 rette di Pascal e dei 10 punti di Kirkman corrispondenti: una configurazione $(10)_3$, in cui i punti e le rette corrispondenti sono omologhi in una polarità. Ora dalle 6 figure π si hanno così 6 polarità *diverse*. La distribuzione dei varî elementi dell'esagramma nelle 6 figure π di Veronese è di notevole importanza; essa serve ad illuminare in modo nuovo e più completo tutta la configurazione.

Diciamo subito che il giovane geometra scoprì in questa varie altre proprietà. Citiamo solo l'esistenza di una successione infinita di configurazioni $(60)_3$ di 60 rette z e 60 punti Z, le quali, senz'essere configurazioni di Pascal, hanno proprietà analoghe a quelle delle 60 rette di Pascal e dei 60 punti di Kirkman, e si comportano come questi elementi coi 20 punti di Steiner e colle 20 rette Cayley-Salmon del dato esagramma (vale a dire, a tre a tre, i punti Z di una di quelle configurazioni sono sulle 20 rette Cayley-Salmon e le rette z passan per i 20 punti Steiner).

[1] *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, 2er Theil, 2e Auflage, Leipzig 1876.

Nell'estate del 1876 Veronese scriveva al Cremona esprimendogli il desiderio di compire i suoi studî nell'Università di Roma, ove allora insegnavano Cremona e Battaglini. Chiedeva di essere ammesso al 4° anno di corso per la laurea in Matematica, ed annunziava di poter presentare come dissertazione di laurea un lavoro sull'esagramma di Pascal, che al Fiedler era parso interessante. Cremona esaminò il lavoro di Veronese, e ne ebbe un'impressione favorevole (1), tanto che non solo la domanda di lui fu accolta, ma egli, ancora un anno prima della laurea, e cioè nel novembre 1876, fu nominato assistente alla cattedra di Geometria projettiva e descrittiva (occupata allora all'Università di Roma dal prof. Salvatore-Dino). In quell'ufficio rimase per quattro anni (prestando anche nel 1879-80 il servizio militare).

Il lavoro sull'esagramma fu presentato all'Accademia dei Lincei dal Battaglini nell'aprile 1877, e pubblicato fra le Memorie [n. 2] (2). Poco dopo il Fiedler ne riportava i principali risultati in un'apposita nota della sua 4ª edizione delle Coniche del Salmon (3); e una lunga esposizione ne faceva Giusto Bellavitis nella 14ª delle sue Riviste di giornali, lodando il lavoro come « veramente profondo e degno d'encomio » (4).

Qualche anno dipoi i volumi dei Lincei accoglievano un altro lungo lavoro del Veronese [n. 5], sopra alcune notevoli configurazioni nel piano e nello spazio (5). Si compone di due Memorie. Nella 1ª, fissate due coniche o quadriche, si prendono, nell'omografia che è il prodotto delle polarità rispetto ad esse, i successivi trasformati di un punto, o di una retta, ecc.; e si studiano le particolarità che essi presentano, specialmente nel caso che l'omografia risulti ciclica, il che dà luogo a particolarità nella posizione reciproca delle due coniche o quadriche. Le equazioni di queste, riferite al triangolo o tetraedro polare comune, facilitano la ricerca. Bisogna riconoscere che qui, come poi in qualche lavoro posteriore, il Veronese non seppe sceverare varie cose che si potevan riguardare come sostanzialmente note, o

(1) Com'è ben noto, Cremona, per verificare quei risultati, che Veronese otteneva principalmente con successive considerazioni di triangoli omologici, ricorse alla superficie cubica dotata di punto doppio, le cui 15 rette non passanti per quel punto doppio formano una configurazione spaziale analoga a quella dei 15 lati dell'esagramma.

(2) V. anche la Nota 1 dell'elenco, contenente un breve sunto della Memoria fatto dall'Autore. La segue subito una Nota di Cremona, che enuncia il metodo di deduzione per mezzo della superficie cubica, testè accennato [poi svolto ampiamente nelle Mem. Acc. Lincei (3) 1, 1876-77, pp. 854-874].

(3) *Anal. Geom. der Kegelschnitte*, 1878, pag. 688.

(4) Atti Ist. Veneto (5) 4, 1877-78, pp. 359-384.

(5) Nell'aprile 1880 il Battaglini aveva presentato, per i Transunti, la Nota [4], in cui si trovano enunciati gran parte dei risultati della Memoria [5] (presentata poi dal Cremona nel gennaio 1881).

L'estratto della [5] è dedicato alla memoria di Bellavitis.

come troppo ovvie, o di scarso interesse, da altre che sono veramente importanti. Fra queste ultime van messi i nuovi risultati sulle terne di tetraedri, che egli chiama *fasciali*, e che C, Stéphanos aveva chiamati *desmici*. La 2ª Memoria approfondisce appunto quei tetraedri, e le superficie del 4° ordine che fanno fascio con essi, ottenendone nuove interessanti proprietà.

L'anno 1880-81 Veronese fu a Lipsia, a fruire di un posto di perfezionamento che aveva ottenuto. Insegnava allora in quell'Università F. Klein; e fu questi che esercitò su di lui una speciale impressione, e che gli fu largo (come Veronese scrisse) di ogni sorta di consigli e d'indirizzi. Frutto di quell'anno fu, anzitutto, la celebre Memoria [n. 8] (¹), pubblicata in tedesco nel vol. 19° dei Mathematische Annalen, che fa epoca nella storia della geometria projettiva degli spazi superiori.

Com'è noto, si avevano già da tempo numerose ricerche di geometria iperspaziale (²). Lasciando da parte l'indirizzo metrico-differenziale che si riattacca specialmente a Riemann, e guardando solo all'indirizzo projettivo e in particolare agli enti algebrici, eran noti varî risultati staccati; come taluni della grande terna di geometri inglesi, Cayley, Sylvester, Salmon, a cui più tardi s'aggiungeva Clifford; altri della scuola tedesca che si riattacca a Plücker, Grassmann e Clebsch, tra i quali si posson citare i lavori del norvegese S. Lie e quelli di Noether, Brill, Klein, Frahm, Voss; in Svizzera le ricerche di Schläfli; in Francia di Jordan e Halphen; in Italia di D'Ovidio. Ciò, limitandosi alle cose di maggior momento; e prescindendo anche da quei lavori, per esempio di Reye, che, pur senza usare locuzioni iperspaziali, indagavano problemi relativi, in sostanza, al campo che stiamo considerando.

Ma i fatti projettivi che s'imparano da quegli studi riguardano generalmente argomenti staccati. In essi gli spazi superiori son concepiti analiticamente; oppure i *punti* di quegli spazi non sono altro che enti geometrici dello spazio ordinario dipendenti da più parametri (così, ad esempio, per Cayley, Plücker, Halphen). Si procede con una certa timidezza. Pochi osano dire esplicitamente, come facevano Grassmann e Sylvester, che la scienza dell'estensione *deve* essere studiata negli spazi a quante si vogliano dimensioni!

Colla Memoria di Veronese si può dire che la geometria projettiva di questi spazi è per la prima volta organizzata e svolta sistematicamente, come scienza geometrica, e non come una specie di analisi travestita. Per Veronese gli elementi generatori degli spazi superiori non sono più elementi di natura qualsiasi, bensì i punti tali quali ce li immaginiamo nel nostro

(¹) Preannunciata nelle Note n.ⁱ 6 e 7.

(²) V. più minuti particolari nell'introduzione storica del mio articolo *Mehrdimensionale Räume*, nella Encyklopädie der mathem. Wissenschaften.

spazio; e con essi si formano le diverse varietà e corrispondenze, si opera con projezioni e sezioni, ecc., come nella geometria ordinaria. Vengono studiate le projettività; e con forme fondamentali delle varie specie riferite projettivamente si generano varietà algebriche molto generali, fra le quali poi l'Autore approfondisce parecchi casi speciali. Per le curve algebriche dello S_n (di cui già Brill e Noether, e poi più esplicitamente Clifford, avevan dato delle proprietà fondamentali), vengono assegnate formole generali che ne legano i caratteri, analogamente a quelle di Plücker e Cayley per le curve ordinarie.

Un altro grande merito del lavoro è l'aver introdotto l'uso sistematico della projezione di una conveniente figura iperspaziale sul piano o nello spazio ordinario, per ottenere le proprietà di una data figura del piano o dello spazio. Veronese rileva che può essere più facile, o più luminoso, lo studio della figura iperspaziale; e che inoltre questa figura, variamente projettata, può dare nel piano o nello spazio diverse sorta di enti geometrici. Questo metodo viene da lui applicato a talune configurazioni di punti, rette e piani; alle curve razionali d'ordine n (o minore), che l'Autore dimostra esser projezioni di quella appartenente ad S_n; alle superficie rappresentabili sul piano mediante sistemi di curve d'ordine m (o minore), le quali risultano tutte projezioni di una notevole superficie d'ordine m^2 dello spazio di dimensione $\frac{m(m+3)}{2}$ [1].

Il procedimento usato è generalmente sintetico; ed è quello che, dopo la Memoria di Veronese, tenderà a prevalere nella Geometria projettiva iperspaziale.

Numerosissimi furono gli scritti, specialmente italiani, che vennero, subito dopo di questo, a completare od a proseguire le ricerche ivi contenute, e che contribuirono a provare ulteriormente l'importanza di quei metodi.

Possiamo mettere con essi due altri lavori dello stesso Veronese. Nell'uno [n. 12] [2] si fa la Geometria descrittiva dello spazio a 4 dimensioni analogamente a quella dello spazio ordinario; e cioè la projezione centrale dello S_4 su S_3, rappresentando rette, piani e spazi colle tracce e cogli elementi di fuga; poi la projezione ortogonale, ecc. Così Veronese dimostrava nel modo più intuitivo la possibilità di una geometria iperspaziale, i cui punti sono della stessa natura che i punti ordinari [3]. L'altro scritto [n. 15]

[1] Anche notiamo che da curve iperspaziali prive di punti singolari, con convenienti projezioni, l'Autore ottiene curve piane e sghembe dotate di singolarità.

[2] Presentato all'Ist. Veneto nel maggio 1882; ma già un anno prima l'Autore ne aveva comunicato i principali risultati nel Seminario matematico diretto dal Klein.

[3] A quel lavoro si collega la breve Nota [n. 14] in cui, facendo la projezione centrale dell'intersezione di due V_3^2 coni di S_4, si ottiene una costruzione semplice della superficie del 4° ordine a conica doppia, dei suoi piani tangenti, ecc.

studia diffusamente quella notevolissima superficie del 4° ordine dello S_5, a cui poi fu dato il nome di Veronese, e la V_4^3 che l'accompagna. La superficie dà per projezione nello spazio ordinario la superficie romana di Steiner: della quale in tal modo il nostro geometra ritrova le proprietà (1).

Durante il soggiorno di Lipsia, Veronese scrisse un'altra Memoria [n. 9], voluminosa, per rispondere alla questione che l'Accademia delle scienze del Belgio aveva messa a concorso pel 1881: ossia l'estensione della teoria dell'esagramma di Pascal a curve e superficie superiori. Seguendo un concetto del Klein, l'A. rappresenta le sostituzioni su n lettere, e i gruppi di sostituzioni, prendendo un punto $(x_1 \dots x_n)$ di S_{n-1}, insieme con quelli che si traggono da esso facendo sulle sue coordinate le date sostituzioni. Approfondisce varie configurazioni a cui così si è condotti. Poi, posto $n = 6$, i gruppi di sostituzioni fra i 6 vertici di un esagono di Pascal, che mutano in sè una retta di Pascal, o un punto di Steiner, ecc., vengono colla detta rappresentazione a rispecchiarsi in configurazioni di punti di S_{n-1}, e quindi poi in varietà diverse, che si possono riguardare come analoghe, in certo senso, ai detti elementi dell'esagramma di Pascal. Tralasciamo, per brevità, altre rappresentazioni od estensioni di questo.

Era intanto venuto a mancare, nel novembre 1880, il Bellavitis, che insegnava la Geometria analitica nell'Università di Padova. Messa la cattedra a concorso, il giovane Veronese vinceva la prova nell'ottobre 1881. Così un cultore dei più moderni indirizzi geometrici succedeva ad un acerbo critico degli stessi indirizzi! (2).

Colla cattedra di Geometria analitica Veronese tenne, fino alla morte, per incarico, quella di Geometria superiore; e fu apprezzato dai suoi discepoli come insegnante efficace.

Fin dai primi tempi egli prese a svolgere, come corso libero, o nel corso di Magistero, una serie di lezioni elementari sui fondamenti della geometria a più dimensioni, partendo dai primi principî. Volendo lavorare su basi sicure, e fare della geometria sintetica, egli si trovò condotto ad analizzare e a rifare anche le prime proposizioni dell'ordinaria geometria

(1) Facendo invece due projezioni piane della superficie di S_5, l'una dal piano di 3 suoi punti, l'altra dal piano di una sua conica, si ottengono le corrispondenze biunivoche quadratiche fra i punti di due piani. Ma il ragionamento, con cui Veronese ha creduto di trarne la dimostrazione della scomponibilità di ogni trasformazione Cremoniana piana in un prodotto di trasformazioni quadratiche, non regge. (Cfr. la mia recensione di quel lavoro nel Jahrbuch der Fortschritte der Mathem., t. 16, 1884, pag. 733).

(2) Veggasi, ad esempio, l'ironico commento di Bellavitis allo scritto di Klein sulla Geometria non-euclidea, in Atti Ist. Veneto (4) 2, 1872-73, pag. 441; o la recensione di lavori del D'Ovidio [Atti Ist. Veneto (5) 3, 1876-77, pag. 196] nella quale vuol chiamare, insistentemente, « *la geometria falsa* » quella che in D'Ovidio è la « metrica projettiva »; e parla (pag. 203) delle *aberrazioni geometriche* che son cominciate coll'opera di Lobacefski!

elementare. Nacque così, come frutto di un assiduo lavoro di quasi dieci anni, un'opera di grande mole [n. 17], subito ristampata in tedesco [n. 21], il cui titolo, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare*, mette in rilievo due fatti. L'uno è che si tratta della parte fondamentale, elementare, non delle parti più alte, della Geometria a più dimensioni. L'altro fatto, a cui alludono le varie « unità rettilinee », è che in questa opera, per la prima volta, si fa una Geometria che non si basa sul così detto assioma 5° d'Archimede. Così a Veronese spetta il vanto di avere dato, dopo la grande invenzione della Geometria non-Euclidea, un secondo esempio di Geometria diversa da quella tradizionale: la *Geometria non-Archimedea* ([1]). I segmenti rettilinei che compaiono in questa Geometria possono essere, gli uni rispetto agli altri, infiniti o infinitesimi. Si ha una classe di numeri *trasfiniti* (diversi da quelli di G. Cantor). La natura delicata dell'argomento, e un po' anche una certa oscurità e trascuranza nell'esposizione, hanno permesso che si elevassero dei dubbi sulla solidità dell'edifizio non-Archimedeo di Veronese. Ma i dilucidamenti forniti da questo e più ancora dal Levi-Civita, e certamente anche il fatto che, più tardi, Hilbert per via analitica semplicissima ha pure mostrato la possibilità logica di una Geometria non-Archimedea, hanno fatto tacere le discussioni che s'eran sollevate al riguardo ([2]).

Molte altre cose originali s'incontrano nel libro dei *Fondamenti*. Così: una trattazione della corrispondenza biunivoca di uguaglianza delle figure, che esclude completamente l'uso del movimento; una definizione di rette parallele (come rette simmetriche rispetto ad un punto), che non esige la precedente cognizione del piano, e permette in compenso una dimostrazione della proprietà fondamentale del piano (che la retta congiungente due punti di questo giace in esso); tutto lo svolgimento fatto in modo da tener conto sì della geometria euclidea, come di quelle non-euclidee.

Dai *Fondamenti* Veronese trasse poi, aiutato da Paolo Gazzaniga, il materiale per un trattato di Geometria elementare [n. 25], notevole sotto varî riguardi: sia per le originali trattazioni di alcune teorie fondamentali testè accennate, a cui qui vanno aggiunte anche la teoria dell'equivalenza ([3]) e quella delle proporzioni; e sia perchè in questo trattato, come già nei *Fondamenti*, l'analisi dei fatti che la Geometria trae dalla osservazione empirica, anzi che dal ragionamento, è spinta più innanzi di ciò che non si fosse fatto nei trattati elementari precedenti. L'opera, variamente presentata

([1]) Nella Memoria n. 16 è minutamente analizzato il legame dell'assioma d'Archimede coi postulati della continuità.

([2]) Su queste discussioni (e anche sulla questione di priorità) versano parecchie delle Note, che nell'elenco portano i n.[i] 19 e segg.

([3]) V. su questa la Nota n. 22.

pei varî ordini di scuole, ha già avuto molte edizioni; e non è stata senza influenza sugli altri Elementi di geometria italiani.

Le pubblicazioni di cui abbiamo discorso avevano dato larga fama al Veronese, in Italia e fuori, procurandogli onori da parecchi corpi scientifici. Ma la scienza e l'insegnamento non bastavano alla sua attività. Egli volle anche dedicarsi alla vita pubblica; e fu, durante la 20ª legislatura, dal 1897 al 1900, deputato del Collegio di Chioggia; dal 1899 in poi consigliere comunale di Padova; nel marzo 1904 fu nominato senatore. In ambi i rami del Parlamento assiduo, studioso, pronunziò spesso discorsi apprezzati. Non solo patrocinava gl'interessi di Padova o di Chioggia; ma a tutte le questioni d'importanza per la nostra Italia egli s'interessava. Più specialmente, oltre che delle cose attinenti alla pubblica istruzione, si occupò con tutto l'animo di quelle relative al regime forestale ed idraulico del Paese; e in particolar modo della protezione della laguna veneta [1]. Così egli contribuì attivamente al ripristino del Magistrato alle Acque per le provincie venete, e alla fondazione dell'Istituto idrotecnico di Stra per lo studio sperimentale dei problemi idraulici (di cui fu presidente); diede impulso, nell'Istituto Veneto, alle ricerche lagunari; e nella riforma della Scuola degl'ingegneri di Padova fece sì che avesse un largo posto l'indirizzo idraulico. Merita pure di essere rilevata, fra le altre sue benemerenze, l'opera attivissima spiegata a favore della Scuola d'arte « Pietro Selvatico » per le arti decorative e industriali, che è vanto di Padova.

Era Veronese d'idee schiettamente liberali, anzi democratiche, in conformità della sua origine; e si adoperava in ogni occasione per il bene e l'elevazione del popolo. Aveva modi bonari, cordiali con tutti. In famiglia fu marito e padre affettuosissimo [2].

Alto di statura, di aspetto robusto, forte, simpatico, aveva uno sguardo acuto che pareva rivelare l'acutezza dell'ingegno.

Nell'inverno 1911-12 si ammalò d'influenza; e con questa si manifestarono anche gravi disturbi circolatori. Fu come un crollo. Sebbene egli riprendesse poi tutte le sue occupazioni svariatissime, conservando intatte le facoltà intellettuali, gli rimase impresso in volto il male che lo aveva colpito. E all'alba del 17 luglio scorso, improvvisamente, si spegneva, lasciando la Patria in lutto per la perdita di uno dei suoi scienziati più illustri, dei suoi cittadini più operosi e benemeriti.

[1] Cfr., per esempio, il discorso su *La laguna di Venezia*, letto nell'adunanza solenne del R. Ist. Veneto il 29 maggio 1904; Atti, (8) 6, pp. 137-157.

[2] S'era sposato nell'agosto 1885 colla gentile signora baronessa Beatrice Bertolini; e fu un matrimonio felicissimo. Ebbe cinque figli, fra cui due maschi, che ora sono fra i nostri combattenti.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE

DI G. VERONESE.

1. « Nuovi teoremi sull'*Hexagrammum mysticum* ». Transunti R. Acc. Lincei (3) 1, 1876-77, pp. 141-142.
2. « Nuovi teoremi sull'*Hexagrammum mysticum* ». Mem. R. Acc. Lincei (3) 1, 1876-77, pp. 649-703.
3. « Teoremi e costruzioni di Geometria projettiva ». Giorn. di mat., 17, 1879, pp. 172-182.
4. « Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e di superficie di 2° ordine » Note I e II. Transunti R. Acc. Lincei (3) 4, 1879-80, pp. 132-149.
5. « Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado, e di altre curve e superficie ». Memoria I e II. Mem. R. Acc. Lincei, (3) 9, 1880-81, pp. 265-343.
6. « Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von n Dimensionen stattfinden ». Mathematische Annalen, 18, 1881, pag. 448.
7. « Alcuni teoremi sulla geometria a n dimensioni ». Transunti R. Acc. Lincei, (3) 5, 1880-81, pp. 333-338.
8. « Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens ». Mathematische Annalen, 19 (1882), pp. 161-234.
9. « Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$, en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique ». Annali di matem., (2) 11 (1882-83), pp. 93-236.
10. « Sui gruppi $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione ». Ivi, pp. 284-290.
11. « Dei principali metodi in Geometria, e in ispecial modo del metodo analitico ». Prelezione al corso di Geometria analitica. Verona, Drucker e Tedeschi, 1882. Di pag. 32.
12. « Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni ». Atti Ist. Veneto, (5) 8, 1881-82, pp. 987-1024 (con tre tavole).
13. « Dimostrazione della formola

$$\left|\begin{matrix} p \\ r-1 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} q-1 \\ 1 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} p \\ r \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} q-1 \\ 2 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} p \\ r+1 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} q-1 \\ 3 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} p \\ r+2 \end{matrix}\right| + \dots = \left|\begin{matrix} p+q-1 \\ q+r-2 \end{matrix}\right|$$

mediante la Geometria a n dimensioni ». Atti Ist. Veneto, (6) 2, 1883-84, pp. 137-143.
14. « Di una costruzione della superficie del 4° ordine dotata di conica doppia ». Atti Ist. Veneto, (6) 2, 1883-84, pp. 1841-1842.
15. « La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario ». Mem. R. Acc. Lincei, (3) 19, 1883-84, pp. 344-371.
16. « Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede ». Mem. R. Acc. Lincei, (4) 6, 1889 (letta il 21 dicembre 1890), pp. 603-624.
17. « Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica ». Padova, Tip. del Seminario, 1891. Di pp. XLVIII + 630.

18. « A proposito di una lettera del prof. Peano ». Rendic. Circolo matem. Palermo, 6. 1892, pp. 42-47.
19. « Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale ». Ivi, pp. 73-76.
20. « Osservazioni sui principii della geometria ». Atti R. Acc. di scienze, lettere ed arti di Padova. 10, 1893-94, pp. 195-216.
21. « Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp ». Leipzig, Teubner, 1894, XLVI + 710 S.
22. « Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure ». Atti Ist. Veneto, (7) 6, 1895, pp. 421-437.
23. « Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali ». Math. Annalen, 47, 1896, pp. 423-432.
24. « Sul postulato della continuità ». Rend. R. Acc. Lincei, (5) 6, $(1897)_1$, pp. 161-167.
25. « Elementi di Geometria, ad uso dei licei e degli istituti tecnici (primo biennio), trattati con la collaborazione di P. Gazzaniga ». Verona e Padova, Drucker, 1897, pp. XXI + 392. [Una 1ª Parte, autografata, era già uscita a Padova nel 1895].
26. « Appendice agli Elementi di geometria ». Verona e Padova, Drucker, 1897, pagine VIII + 89.
27. « Segmenti e numeri transfiniti ». Rend. R. Acc. Lincei, (5) 7, $(1898)_1$, pp. 79-87.
28. « Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement ». Compte rendu du 2^e Congrès international des mathématiciens (Paris 1900). Paris, 1902, pp. 433-450.
29. « Nozioni elementari di Geometria intuitiva, ad uso dei ginnasi inferiori ». Verona e Padova, Drucker, 1901, pp. VIII + 80.
30. « Commemorazione del Socio Luigi Cremona ». Rend. R. Acc. Lincei, (5) 12, $(1903)_1$, pp. 664-678. [Traduzione in polacco in Wiadamości Matematyczne, 8, 1904, pp. 150-164].
31. « La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità ». Rend. R. Acc. Lincei, (5) 14, $(1905)_1$, pp. 347-351.
32. « Il vero nella matematica. Discorso inaugurale dell'anno scolastico 1905-1906 letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova il giorno 6 novembre 1905 ». Roma, Forzani e C., 1906, pp. 38.
33. « La geometria non-Archimedea ». Atti del 4° Congresso internaz. dei Matematici, Roma 1908. Vol. I (1909), pp. 197-208. [Traduzione francese in Bulletin des sciences math., (2) 33, 1909, pp. 186-204].
34. « Complementi di Algebra e Geometria ad uso dei Licei moderni, trattati con la collaborazione di Paolo Gazzaniga ». Padova, Drucker, 1915, pp. VI + 103.

N. B. Sono omesse in questo elenco le ulteriori edizioni degli « Elementi di geometria » [n. 25] e delle « Nozioni elementari di geometria intuitiva » [n. 29], destinate a diversi ordini di scuole medie.

Si possono aggiungere le brevissime commemorazioni pronunciate dal Veronese all'Istituto Veneto, e pubblicate negli Atti, di: F. Brioschi, (7) 9, 1897-98; A. Caccianiga, (8) 11, 1908-09; F. Berchet, G. Omboni, S. Cannizzaro, (8) 12, 1909-10; G. Schiaparelli, P. Mantegazza, F. Salmoiraghi, C. Malagola, (8) 13, 1910-11.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalandone una serie di carattere geologico del Socio TORQUATO TARAMELLI, ed altre numerose del Corrisp. GINO LORIA riguardanti specialmente la storia delle matematiche. Fa inoltre menzione della Memoria a stampa: *Intorno agli Uropodidae*, del prof. BERLESE, e del vol. VI dell'opera: *Icones Plantarum Formosanarum*, del prof. BUNZO HAYATA.

CONCORSI A PREMI

Al termine della seduta, il Presidente D'OVIDIO informa la Classe del munifico lascito, fatto all'Accademia per disposizione testamentaria dal compianto Tenente Generale LORENZO BIGOTTI, di una somma di lire centomila in rendita al 3,50 per cento, perchè con gl'interessi di tale somma venga istituito un premio triennale da conferirsi dall'Accademia al migliore lavoro tecnico, economico sulla Navigazione Interna Italiana.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 novembre 1917.

Amoretti P. — Sistema per l'utilizzazione del calore dei vulcani per produzione di forza motrice. Palermo, 1917. 4°, pp. 1-15.

Audion J. — La cuadratura del circulo de la eliptica. San Jose de Costa Rica, 1917. 4°, pp. 1-151.

Berlese A. — Intorno agli *Uropadidae* (Estratto dal « Redia », vol. XIII, pp. 1-16). Firenze, 1917. 8°.

Boccardi G. — Principî e riflessioni sulla Polodia. Nota. Torino, 1917. 8°, pp. 1-11.

Boccardi J. M. — Sur la Polhodie du sphéroïde terrestre. Note. Torino, 1917. 8°, pp. 1-30.

Candiani G. — Gli elementi per lo studio della resistenza al moto dei solidi nei fluidi. Padova, 1917. 8°, pp. 1-15.

Casazza G. — Il più grande errore scientifico del secolo XIX. Milano, 1906. 8°, pp. 1-132.

Ciraolo G. — Commemorazione di Angelo Battelli fatta in Roma li 11 aprile 1917. Roma, 1917. 8°, pp. 1-47.

De Toni G. B. — Nuove osservazioni di teratologia fiorale nella *Digitalis purpurea* L. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti », vol. LXXVI, pp. 789-835). Venezia, 1917. 8°.

Jannelli G. — Studio sulla trisezione dell'angolo. Palermo, 1917. 4°, pp. 1-11.

Loria G. — L'enigma dei numeri immaginarî attraverso i secoli (Estr. da « Scientia » Rivista di Scienza, volume XXI, pp. 101-121). Bologna, 1917. 8°.

Loria G. — Le matematiche nell'estremo Oriente (Estr. dai « Rendiconti del Seminario matematico della facoltà di Scienze della R. Università di Roma », vol. IV, pp. 1-48). Roma, 1917. 8°.

Loria G. — Lo spettro dell'immaginario in geometria (Estr. da « Scientia » Rivista di Scienza, vol. XXII, pp. 1-15). Bologna, 1917. 8°.

Meli R. — Appunti sopra alcuni lembi di lias rosso ammonitico dei dintorni di Narni (Umbria) (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXVI, pp. 54-68). Roma, 1917. 8°.

Meli R. — Commemorazione del professore comm. Giuseppe Tuccimei (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXV, pp. 89-98). Roma, 1916. 8°.

Meli R. — Nota preliminare intorno una cava di materiali argillosi refrattari nei dintorni di Roma (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXV, pp. 317-328), Roma, 1916. 8°.

Mirinny L. — L'immutabilité de la Science pure. Paris, 1917. 12°, pp. 1-6.

Raddi A. — Clima e acque dell'altipiano di Bainsizza, S. Spirito o di Laschek (Alto Isonzo) (Estr. dal « Politecnico » an. 1917, pp. 1-8). Milano, 1917. 8°

Raddi A. — I lavori di presa e di allacciamento delle acque per uso d'alimentazione e loro aereazione (Estr. dal « Politecnico », an. 1917, pp. 1-8). Milano, 1917. 8°.

Taramelli T. — Del lago di Doberdò presso Monfalcone (Estr. dai « Rendiconti del Reale Istituto lombardo di Scienze e Lettere », vol. L, pp. 392-398). Milano, 1917. 8°.

Taramelli T. — Il Carso. Pavia, 1917. 8°, pp. 1-16.

Taramelli T. — La formazione dell'Adriatico (Estr. dalla Rivista « La geografia », an. 1917, pp. 172-187). Novara, 1917, 8°.

Taramelli T. — La frana di Gregassi, frazione di Montacuto (Estr. dalla « Rivista di Scienze naturali », volume VIII, pp. 67-74). Pavia, 1917. 8°.

Taramelli T. — La tectonica e i suoi rapporti con l'orografia della provincia di Pavia (Estr. dalla Rivista « La geografia ». an. 1917, pp. 104-113). Novara, 1917. 8°.

Teodoro G. — Alcune osservazioni sui saccaromiceti del *Lecanium persicae* Fab. (Estr. dal « Redia », vol. XIII, pp. 1-5). Firenze, 1917. 8°.

Turati E. — Revisione delle *Syntomis* paleartiche a doppio cingolo giallo, e saggio di una classificazione delle varie specie e forme (Estr. dagli « Atti della Società italiana di Scienze naturali », vol. LVI, pp. 179-232). Pavia, 1917, 8°.

Vallauri G. — Prove comparative sugli audion (Estr. dal Giornale « L'elettrotecnica », nn. 18-19, pp. 1-16). Milano, 1917. 4°.

Zondadari E. — Integrazione grafica e studio delle equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine coi metodi della geometria descrittiva. Roma, 1917. 8°, pp. I-IX; 1-112.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 9º, Sem. 2º.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 1º-2º.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XII. Fasc. 4.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.º — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 novembre 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 10.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 novembre 1917.

Volume XXVI.° — Fascicolo 10°

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 novembre 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Paletnologia. — *Ancora la Grotta preistorica di Equi.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su alcuni operatori superficiali.* Nota del Corrispondente R. Marcolongo.

Recenti e notevoli ricerche (1) hanno mostrato l'utilità e la necessità di considerare alcuni operatori superficiali, che presentano molta analogia con altri operatori di cui il prof. Burali ed io ci siamo diffusamente occupati nei due volumi dell'*Analyse vectorielle générale* (2).

(1) C. Burali-Forti, *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale* [Rend. Circolo mat. Palermo, t. 33, pp. 1-40 (1° semestre 1912)]; P. Burgatti, *Sulle discontinuità delle funzioni scalari e vettoriali e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie* [Rend. R. Acc. Lincei, s. 5a, vol. XXV, pp. 311-316, 372-376 (1916)]: *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie e loro applicazione ai potenziali* [Mem. R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, s. 7a, tomo IV, 1916-1917].

(2) C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale.* I. *Transformations linéaires,* Pavie, 1912; II. *Applications à la Mécanique et à la Physique,* Pavie, 1913. Indicheremo questa pubblicazione brevemente A. V.

1. Se h è punto, vettore, omografia funzione di un punto P di una superficie σ, la *derivata superficiale* di h rispetto al punto P, che si accenna con $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma$ viene definita dalla

$$(1) \qquad \left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma = \frac{dh}{dP}\left\{1 - H(\mathbf{n}, \mathbf{n})\right\} = \frac{dh}{dP} - H\left(\mathbf{n}, \frac{dh}{dP}\mathbf{n}\right),$$

$\mathbf{n}$ essendo un vettore unitario parallelo alla normale in P a σ, volta in un senso determinato.

Segue di qui, come osserva il prof. Burali, che

a) $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma$ è un ente (operatore lineare; omografia, iperomografia) della stessa specie di $\frac{dh}{dP}$:

b) $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma \mathbf{n} = 0$;

c) $\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma \mathbf{x} = \frac{dh}{dP}\mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{x} \times \mathbf{n} = 0$;

e reciprocamente. Infatti, se $\mathbf{u}$ è un vettore arbitrario, $\mathbf{x}$ vettore unitario normale ad $\mathbf{n}$, si può sempre porre

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{n} . \mathbf{n} + \mathbf{u} \times \mathbf{x} . \mathbf{x};$$

e però, in virtù di *b*) e *c*) risulta

$$\left(\frac{dh}{dP}\right)_\sigma \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{x} . \frac{dh}{dP}\mathbf{x} = \frac{dh}{dP}\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{n} . \frac{dh}{dP}\mathbf{n} = \frac{dh}{dP}\left\{1 - H(\mathbf{n}, \mathbf{n})\right\}\mathbf{u};$$

quindi, per l'arbitrarietà di $\mathbf{u}$, risulta la (1).

L'omografia $1 - H(\mathbf{n}, \mathbf{n})$ è una dilatazione le cui direzioni principali sono $\mathbf{n}$ ed ogni $\mathbf{x}$ normale ad $\mathbf{n}$; applicata ad un vettore qualunque $\mathbf{u}$, dà il vettore proiezione di $\mathbf{u}$ sul piano tangente in P a σ.

In particolare se $\mathbf{u}$ è un vettore, da (1) risulta

$$(2) \qquad \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma = \frac{d\mathbf{u}}{dP} - H\left(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{n}\right);$$

quindi calcolando il primo invariante ed il vettore di questa omografia, si ha la definizione (Burgatti) della div e rot superficiale di un vettore; precisamente:

$$(3) \qquad \operatorname{div}_\sigma \mathbf{u} = I_1 \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma = \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{n}$$

$$(4) \qquad \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{u} = 2V \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma = \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{n}.$$

Di qui si deduce:

(5) $\mathrm{div}_\sigma \mathbf{n} = \mathrm{div}\, \mathbf{n}$; $\mathrm{rot}_\sigma \mathbf{n} = \mathrm{rot}\, \mathbf{n} = 0$; $\mathbf{n} \times \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{u}$.

Allo stesso modo si possono definire gli altri operatori, $\mathbf{grad}_\sigma\, \alpha$, $\mathbf{Rot}_\sigma\, \alpha, \ldots$ (α omografia) valendosi delle (3), (4) di pag. 70; (1), (2) di pag. 97, 98 di A. V. I; e sostituendo alle ordinarie derivate, la derivata superficiale definita da (2).

In modo anche più semplice, in base alla (1) e riferendoci ad una terna fondamentale, si può definire $\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha$ colla

$$\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha = \left(\frac{d\alpha}{dP}\, \mathbf{i}\right)_\sigma \mathbf{i} + \left(\frac{d\alpha}{dP}\, \mathbf{j}\right)_\sigma \mathbf{j} + \left(\frac{d\alpha}{dP}\, \mathbf{k}\right)_\sigma \mathbf{k}$$

e risulterà subito

(6) $$\mathrm{grad}_\sigma\, \alpha = \mathrm{grad}\, \alpha - \left(\frac{d\alpha}{dP}\, \mathbf{n}\right) \mathbf{n}\,;$$

ed in particolare, se α è un numero reale φ,

(7) $$\mathrm{grad}_\sigma\, \varphi = \mathrm{grad}\, \varphi - \mathrm{grad}\, \varphi \times \mathbf{n}\,.\, \mathbf{n}\,;$$

cioè (Burali): il gradiente superficiale è la componente tangenziale dell'ordinario vettore che rappresenta il gradiente della funzione numerica φ.

Con procedimento del tutto analogo si possono definire gli operatori superficiali $\mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha$, $\Delta'_\sigma \mathbf{u}$, $\Delta_\sigma\, \alpha$, mediante le

(8) $$\mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha = \mathrm{Rot}\, \alpha - \mathbf{n} \wedge \frac{d\alpha}{dP}\, \mathbf{n}$$

(9) $$\Delta'_\sigma \mathbf{u} = \Delta' \mathbf{u} - \frac{d\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\, \mathbf{n}\right)}{dP}\, \mathbf{n}$$

(10) $$\Delta_\sigma\, \alpha = \Delta\, \alpha - \frac{d\left(\frac{d\alpha}{dP}\, \mathbf{n}\right)}{dP}\, \mathbf{n}\,;$$

e se α è un numero reale φ:

(11) $$\Delta_\sigma \varphi = \Delta \varphi - \mathbf{n} \times \frac{d\, \mathrm{grad}\, \varphi}{dP}\, \mathbf{n}\,.$$

Di qui

$$\Delta'_\sigma \mathbf{n} = \Delta' \mathbf{n}\,.$$

2. Valgono per i nuovi operatori superficiali così definiti quasi tutte le proprietà dimostrate in A. V. I. Così

$$\Delta'_\sigma \mathbf{u} = \mathrm{grad}_\sigma \frac{d\mathbf{u}}{dP}$$

e se **a** è un vettore costante:

$$(\mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha)\, \mathbf{a} = \mathrm{rot}_\sigma\, \alpha \mathbf{a} \;\; ; \;\; \Delta'_\sigma (\alpha \mathbf{a}) = \Delta_\sigma \alpha \,.\, \mathbf{a} \,.$$

Vogliamo qui notare le due nuove formule:

$$(12) \qquad \mathrm{rot}_\sigma\, \mathrm{grad}_\sigma \varphi = \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathrm{grad}\, \varphi = - \mathrm{Rot}\, \mathrm{H}\, (\mathbf{n}\, ,\, \mathbf{n})\, \mathrm{grad}\, \varphi$$

$$(13) \qquad \mathrm{div}_\sigma\, \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = 2\mathrm{V} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP} \frac{d\mathbf{n}}{dP} \right) \times \mathbf{n} \, ;$$

cioè, in generale, i secondi membri non sono più nulli, come per gli ordinarii operatori.

Per dimostrare la (12), pongasi

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}_\sigma\, \varphi = \mathrm{grad}\, \varphi - \mathrm{grad}\, \varphi \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} \, ;$$

$$\mathrm{rot}_\sigma\, \mathrm{grad}_\sigma\, \varphi = \mathrm{rot}\, \mathbf{v} - \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} .$$

Ora, per formule note, si ha successivamente:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{v} = - \mathrm{grad}\, (\mathrm{grad}\, \varphi \times \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} = - \left(\frac{d\, \mathrm{grad}\, \varphi}{dP} \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathrm{grad}\, \varphi \right) \wedge \mathbf{n} \, ;$$

$$\mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} = \mathbf{n} \wedge \left\{ \frac{d\, \mathrm{grad}\, \varphi}{dP} \mathbf{n} \right.$$

$$\left. - (\mathbf{n} \times \mathrm{grad}\, \varphi) \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{n} - \mathrm{grad}\, (\mathrm{grad}\, \varphi \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} \right\} ;$$

ricordando quindi che le due omografie $\frac{d\, \mathrm{grad}\, \varphi}{dP}$, $\frac{d\mathbf{n}}{dP}$ sono due dilatazioni e che $\frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{n} = 0$, risulta la prima forma della (12); la seconda forma si deduce applicando la [3] di pag. 84 di A. V. I.

Per la (13), posto per compendio $\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dP}$, si deduce subito

$$\mathrm{div}_\sigma\, \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \left(\mathrm{rot}\, \alpha \mathbf{n} - \frac{d\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} \right) = 2\mathbf{n} \times \left\{ \mathrm{V} \left(\frac{d\alpha \mathbf{n}}{dP} \right) - \frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP} \mathbf{n} \right\} .$$

Ma (A. V. I., pag. 130 e pag. 67)

$$\frac{d\alpha \mathbf{n}}{dP} = \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{n} + \alpha \frac{d\mathbf{n}}{dP} \quad ; \quad \frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP} \mathbf{n} = \mathrm{V} \left(\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{n} \right) ;$$

quindi è vera la (13).

Sono del pari notevoli ed utili queste altre formule

$$(14) \qquad \mathrm{div}_\sigma\, \mathrm{grad}_\sigma\, \varphi = \mathrm{div}\, \mathrm{grad}_\sigma\, \varphi \, ;$$

e per h numero

$$\operatorname{div}_\sigma (h \operatorname{grad}_\sigma \varphi) = \operatorname{div} (h \operatorname{grad}_\sigma \varphi) , \tag{15}$$

$$\mathbf{n} \times \operatorname{rot}_\sigma \operatorname{grad}_\sigma \varphi = 0 ; \tag{16}$$

la cui dimostrazione non presenta difficoltà.

Possiamo ora domandarci di assegnare le soluzioni più generali delle equazioni

$$\operatorname{div}_\sigma \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{u} = 0 . \tag{17}$$

La prima equivale alla

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} .$$

Se quindi poniamo, con m numero e $\mathbf{v}$ vettore da determinarsi:

$$\mathbf{u} = m \mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} ,$$

si ottiene subito

$$m \operatorname{div} \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

ed anche, per le (5),

$$m \operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{v} ;$$

e questa, per $\operatorname{div} \mathbf{n} \neq 0$, determina il numero m, mentre $\mathbf{v}$ resta arbitrario. Quindi la soluzione più generale della prima delle (17) è

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{n} \times \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{v}}{\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n}} \mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}$$

con $\mathbf{v}$ arbitrario. In particolare, assumendo $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$, si ha la soluzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \wedge \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma \varphi .$$

Se poi $\operatorname{div} \mathbf{n} = 0$ (caso delle superficie a curvatura media nulla), per la risolubilità della prima delle (17) occorre che $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$; ed m risulta arbitrario.

Applicando lo stesso metodo alla seconda equazione, per la (4) otteniamo

$$\operatorname{grad} m \wedge \mathbf{n} + \left(\operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP}\right) \mathbf{n} - \left(\operatorname{div} \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{n}}{dP}\right) \mathbf{v} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} . \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} ;$$

ossia

$$\operatorname{grad} m \wedge \mathbf{n} + \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{v} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} . \mathbf{n} . \tag{18}$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}$ risulta

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} = \operatorname{div} (\mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n})$$

quindi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} + \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

con

$$\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{w} = 0 \tag{19}$$

e però

$$\mathbf{u} = m\,\mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{w} \,, \tag{10}$$

è la forma generale della soluzione della seconda delle (17), essendo $\mathbf{w}$ un vettore qualunque soddisfacente alla (19), e m un numero che soddisfa la (18), della forma

$$\operatorname{grad} m \wedge \mathbf{n} = \mathbf{t}$$

$\mathbf{t}$ essendo un vettore noto. Se prendiamo $\mathbf{w} = \mathbf{n}$, risulta $\operatorname{grad} m \wedge \mathbf{n} = 0$ e quindi m costante su σ e si ottiene la soluzione nota $\mathbf{u} = m\,\mathbf{n}$ (m costante).

Osserviamo ancora che, valendo la formula (A. V. I, pag. 84 [2])

$$\operatorname{grad}_\sigma (\mathbf{u} \wedge) = - \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{u} \,,$$

si conclude che una soluzione particolare della

$$\operatorname{grad}_\sigma \alpha = 0$$

è data da

$$\alpha = \mathbf{n} \wedge \,.$$

3. Le formule integrali, costituenti i teoremi della divergenza, del rotore e del gradiente su di una superficie σ, limitata da un contorno s, e stabilite dal prof. Burgatti (¹), cioè:

$$\int \operatorname{div}_\sigma \mathbf{u} \,.\, d\sigma = \int \mathbf{n} \times \mathbf{u} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n} \, d\sigma - \int \mathbf{v} \times \mathbf{u} \, ds$$

$$\int \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{u} \,.\, d\sigma = \int \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n} \, d\sigma - \int \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \, ds$$

$$\int \operatorname{grad}_\sigma \alpha \,.\, d\sigma = \int \alpha \mathbf{n} \,.\, \operatorname{div} \mathbf{n} \, d\sigma - \int \alpha \mathbf{v} \, ds$$

$\mathbf{v}$ essendo un vettore unitario normale ad s e vòlto verso l'interno di σ, possono essere agevolmente completate. Basta, seguendo il metodo costan-

(¹) Vedi la seconda delle Note citate del prof. Burgatti.

temente seguìto in A. V. I, pp. 108 e seg. ([1]), nel secondo sostituire ad $\mathbf{u}$ il vettore $\alpha\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ vettore costante) ed α omografia funzione di P; porre nel terzo $\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dP}$, per ottenere le nuove formule:

$$\int \mathrm{Rot}_\sigma\, \alpha\, d\sigma = \int \mathbf{u} \wedge \alpha \,.\, \mathrm{div}\, \mathbf{n}\, d\sigma - \int \mathbf{v} \wedge \alpha\, ds$$

$$\int \Delta'_\sigma\, \mathbf{u}\, d\sigma = \int \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{n} \,.\, \mathrm{div}\, \mathbf{n}\, d\sigma - \int \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\, ds$$

$$\int \Delta_\sigma\, \alpha\, d\sigma = \int \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{n}\right) . \mathrm{div}\, \mathbf{n}\, d\sigma - \int \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{v}\, ds ;$$

quest' ultima, a sua volta, si ottiene dalla precedente ponendo $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{a}$.

4. Una importante applicazione, fatta dal Burgatti, di questi operatori superficiali consiste nella ricerca, sotto forma assoluta, delle discontinuità dei potenziali di strato semplice e di doppio strato attraverso σ; e a varie questioni della teoria dell'elasticità.

Accennando con $[h]$ la discontinuità di h attraverso σ, la formula fondamentale dimostrata dal Burgatti ([2]) che dà la discontinuità della derivata di un vettore rispetto ad un punto, è la seguente:

$$\left[\frac{d\mathbf{s}}{dM}\right] = \frac{d[\mathbf{s}]}{dP} + H(\mathbf{n}, \mathbf{v}), \tag{21}$$

$\mathbf{v}$ essendo un altro vettore incognito.

Vogliamo accennare ad un'altra applicazione e che riguarda una ricerca, oggetto di due recenti e interessanti Note del prof. Maggi ([3]).

Immaginiamo che $\mathbf{s}$ rappresenti lo spostamento in un punto di un corpo elastico isotropo, e generalmente discontinuo attraverso σ; e supponiamo invece che sia continua, attraverso σ, la pressione normale; cioè

([1]) Col sussidio dei metodi e delle notazioni dell'A. V. il sig. Vincent C. Poor, dell'Università di Michigan, ha ottenuto eleganti formule di trasformazione di integrali di volume in integrali di superficie, relative ad una omografia funzione simmetrica di due punti P e M: *Transformation Theorems in the Theory of the Linear Vector Function* [Bull. of the American Mathem. Society, vol. XXII, pp. 174-181 (1916)]. Vedi nello stesso volume le osservazioni del sig. G. B. Wilson, pp. 336-337 e la replica del Poor, pp. 503-504. Sui metodi di Gibbs si può vedere quanto, in risposta al sig. Wilson, ripetutamente il prof. Burali ed io esponemmo nelle nostre pubblicazioni.

([2]) Vedi la prima delle Note citate.

([3]) G. A. Maggi, *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni* [Rend. R. Acc. Lincei, s. 5ª, vol. XXVI, pp. 189-194 (1917)]; *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche* [Ibid., pp. 350-357].

detta β la omografia delle pressioni interne, λ e μ e solite costanti elastiche d'isotropia e quindi (A. V. II. pag. 29 [1])

$$\beta = -\lambda \operatorname{div} \mathbf{s} - 2\mu \, \mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}},$$

si abbia $[\beta \mathbf{n}] = 0$; ossia

$$\lambda [\operatorname{div} \mathbf{s}] \mathbf{n} + 2\mu \left[\mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] \mathbf{n} = 0. \tag{22}$$

Supponiamo ora che su σ la discontinuità di $\mathbf{s}$ sia, nel caso degli spostamenti di Volterra,

$$[\mathbf{s}] = \mathbf{a} + \Omega \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})$$

con $\mathbf{a}, \Omega, \mathrm{O}$ costanti; per modo che

$$\operatorname{div} [\mathbf{s}] = 0 \quad , \quad \frac{d[\mathbf{s}]}{d\mathrm{P}} = \Omega \wedge \quad , \quad \mathrm{D} \frac{d[\mathbf{s}]}{d\mathrm{P}} = 0.$$

Operando sulla (21) con I_1 e D risulta

$$[\operatorname{div} \mathbf{s}] = \mathbf{n} \times \mathbf{v} \quad ; \quad \left[\mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] \mathbf{n} = \tfrac{1}{2} \mathbf{v} + \tfrac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \,.\, \mathbf{n};$$

e sostituendo nella (22)

$$(\lambda + \mu)\, \mathbf{n} \times \mathbf{v} \,.\, \mathbf{n} + \mu \mathbf{v} = 0.$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}$ risulta $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0$ e quindi $\mathbf{v} = 0$. Ossia, (21),

$$\left[\frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] = \Omega \wedge \quad , \quad \left[\mathrm{D} \frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} \right] = 0. \tag{23}$$

La continuità della dilatazione, trae di conseguenza la continuità delle componenti di deformazione, cioè dello strain.

Posto ora $\frac{d\mathbf{s}}{d\mathrm{M}} = \alpha$, dalle (23) risulta ($\mathbf{a}$ vettore costante)

$$[\alpha \mathbf{a}] = \Omega \wedge \mathbf{a} \quad , \quad \frac{d[\alpha \mathbf{a}]}{d\mathrm{P}} = 0.$$

D'altra parte, sempre conformemente alla (21), si può porre

$$\left[\frac{d\,\alpha \mathbf{a}}{d\mathrm{M}} \right] = \mathrm{H}(\mathbf{n}, \mathbf{v})$$

e quindi per ogni $\mathbf{t}$ tale che $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0$, risulta

$$\left[\frac{d\,\alpha \mathbf{a}}{d\mathrm{M}} \right] \mathbf{t} = 0;$$

e questa, come si vede subito, traduce il fatto che tutte le derivate seconde delle componenti (u, v, w) dello spostamento, tranne $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \ldots$ se $\mathbf{n}$ è parallelo alle z, sono continue attraverso σ.

Ma ora considerando l'equazione di equilibrio e supposte continue le forze di massa, risulta

$$(\lambda + \mu)\,[\text{grad div } \mathbf{s}] + \mu\,[\text{grad } \alpha] = 0\,.$$

Se ci riferiamo ad una terna fondamentale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{n}$ e notiamo che

$$\text{grad } \alpha = \frac{d\alpha\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{i} + \frac{d\alpha\mathbf{j}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{j} + \frac{d\alpha\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{n}\,;$$

e che grad div $\mathbf{s}$ è lineare nelle $\frac{d\alpha\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{i}\,, \frac{d\alpha\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{j}\,, \ldots, \frac{d\alpha\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{n}$, si conclude che $\left[\frac{d\alpha\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\right]\mathbf{n}$ è continua. Da questo risultato e da quello già conseguito si trae che

$$\left[\frac{d\alpha\mathbf{a}}{d\mathrm{M}}\right] = 0\,;$$

sono cioè continue le derivate seconde delle componenti di spostamento e quindi continue le derivate prime dello strain.

E così si può continuare.

Fisica matematica. — *Omogeneità delle equazioni e Similitudine nella fisica.* Nota I di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Origine e argomento di queste ricerche.

1. In questi ultimi anni fu ripetutamente richiamata l'attenzione dei fisici e dei matematici sul Principio della similitudine fisica dalle discussioni provocate da due interessanti pubblicazioni; l'una di Lord Rayleigh [1] che semplicemente incitava a far maggior uso di quel principio, evidentemente inteso quale immediata estensione del noto Principio della similitudine dinamica a tutti i rami della fisica; l'altra del sig. R. C. Tolman [2],

[1] *Nature*, vol. 95, n. 2368, marzo 1915; vol. 95, n. 2387 e vol. 95, n. 2389.

[2] Physical Review NS., vol. III, pag. 214: vol. IV, pag. 145; vol. IV, pag. 345; vol. VI, pag. 219; Oefversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Föhandlingar, Bd. LVII Afd. A. N:o 22; Science Reports of the Tôhoku Imp. University, I, vol. V, pag. 33; Physikal Review NS., vol. VIII, pag. 1, pag. 8 e pag. 423.

che esponeva un Principio di similitudine, secondo l'autore, completamente nuovo e differente da quello della similitudine, inteso nel senso precedente.

Le obbiezioni mosse tanto alla piana trattazione dell'illustre fisico inglese, quanto alla più originale teoria del fisico americano, non riguardavano solamente qualche questione particolare, ma vertevano specialmente sulla portata e sulla essenza stessa di cotesti principî. Però, per quanto condotte in forma apparentemente esatta, anzi matematica, lasciarono tutti i contendenti fermi nei loro opposti pareri.

Il desiderio di veder chiaro in una questione fondamentale e di così estrema generalità mi ha condotto ad una serie di considerazioni, delle quali avrò l'onore di render brevemente conto all'Accademia con questa e due altre Note che seguiranno immediatamente.

2. Un primo attento esame delle questioni discusse mi convinse che due erano le principali cause delle divergenze sopra accennate.

La prima era una quasi generale deficienza di esattezza e di metodo nella trattazione di cotesti argomenti; deficienza evidentemente causata dalla scarsa considerazione data nei principali trattati alle teorie fondamentali dell'omogeneità e della similitudine, le quali, pur avendo avute numerose applicazioni in qualche isolato campo pratico, sono in fondo rimaste, per quanto riguarda il loro sviluppo sistematico, quasi al punto a cui le aveva portate il Bertrand colla sua nota Memoria del 1848 e con qualche pubblicazione successiva [1], nelle quali aveva ripresentate più modernamente ed estese alla fisica le concezioni newtoniane sulla similitudine dinamica [2].

L'altra, più sostanziale, causa di divergenze era l'insufficienza della nostra conoscenza dei caratteri delle così dette *costanti universali della fisica*, le quali non furono mai studiate in forma generale e sistematica e sopra tutto in rapporto alle teorie che le avevano introdotte.

Per evitare la prima delle suddette cause di equivoci, porrò subito chiaramente i tratti fondamentali delle Nozioni che userò in seguito. Ciò mi permetterà di giungere, in questa stessa Nota, ad un'esatta caratterizzazione dei Principî dell'omogeneità delle equazioni e della similitudine.

Quando poi, nella Nota seguente, studierò i diversi criteri d'applicazione di questi Principî alle varie teorie della fisica e quindi avrò a fare colle loro costanti universali, eviterò la seconda causa di equivoci col valermi di alcuni dei risultati di un mio studio *sulle relazioni generali fra le costanti universali e le rispettive teorie fisiche*, che è attualmente in corso di pubblicazione negli Atti della R. Accademia di Torino.

[1] Journal de l'École Polytechnique, Cah. 32°, pag. 189; C. R. tom. XXV, pag. 163; tom. LXXXVI, pag. 916; *Leçons sur la théorie mat. de l'électricité*, Chap. XIII.

[2] *Principia*, lib. II, Prop. XXXII e seg.

Così potrò infine, in una terza ed ultima Nota risolvere, come semplici esempî di applicazione delle considerazioni che avranno preceduto, tutte le questioni poste e non esaurite nelle diverse discussioni ricordate in principio.

Le nozioni generali di omogeneità e di similitudine.

3. Per lo scopo che mi prefiggo è necessario di considerare queste nozioni fondamentali nella loro forma più generale e quindi di evitare di concepirle secondo il procedimento ordinariamente usato, che le pone quando è già stato scelto, per le diverse entità fisiche, un determinato sistema di dimensioni e ad esso le riferisce, perchè in questo caso si ottengono le espressioni, non già delle nozioni pure, ma di ciò che esse divengono in conseguenza di quella speciale scelta.

Bastano d'altra parte semplicissime considerazioni per convincersi che tali nozioni sono precedenti a qualsiasi scelta di sistemi di dimensioni; anzi, risalendo ancora in questo senso, si vede senz'altro la possibilità di porre una nozione di similitudine, e quindi quella di omogeneità, ancor più primitive, precedenti non solo a qualsiasi scelta di sistema di dimensioni, ma anche all'ammissione di quelle relazioni fra le differenti entità fisiche, che permettono d'ordinario di ricondurle tutte ad un ristretto numero di esse. Questa similitudine sarebbe assai più ampia della consueta, ma conveniente soltanto ad una scienza nei primi stadî del suo sviluppo.

4. Per fissare queste idee con un esempio, consideriamo per semplicità e brevità il solo caso geometrico e, dapprima, una geometria che, avendo superato di poco il suo primo stadio *qualitativo*, sia giunta solamente a riconoscere le relazioni esistenti fra entità di una stessa specie, per es. i rapporti fra il diametro e la circonferenza nel cerchio, fra la superficie di un cerchio e quella del quadrato ad esso circoscritto, fra il volume dei coni e quello dei cilindri di egual base e di eguale altezza, ecc., ma che non sia ancora giunta a riconoscere le relazioni che permettono di ricondurre le tre nozioni di *lunghezza*, *superficie* e *volume* ad una qualsiasi di esse. Questa geometria, estremamente povera, avrebbe però sempre le sue possibili leggi espresse con equazioni omogenee, anzi triplicemente omogenee per rapporto alle lunghezze, alle superficie ed ai volumi, e corrispondentemente ammetterebbe una similitudine più ampia dell'ordinaria, ossia a tre rapporti indipendenti. Dette quindi l, S e V rispettivamente le lunghezze, le superficie e i volumi in un dato sistema geometrico U, l', S' e V' le omologhe entità in un altro sistema U' e λ, σ e ζ tre parametri arbitrarî, le espressioni delle leggi di quella geometria ammetterebbero il gruppo di trasformazioni:

(1) $$l' = \lambda l \quad , \quad S' = \sigma S \quad , \quad V' = \zeta V \, ,$$

e in essa il secondo sistema U' sarebbe *simile* al primo U.

Solamente dopo che tale geometria avrà riconosciute le relazioni esistenti fra le tre entità l, S e V, potrà arricchirsi di molte altre leggi; ma da allora fra i parametri λ, σ e ζ, dapprima arbitrarî, sussisterà il vincolo di essere fra di loro nel rapporto, rispettivamente, di n, n^2 e n^3, ciò che ridurrà l'omogeneità di quelle equazioni e la corrispondente similitudine ad avere effettivamente un solo rapporto arbitrario.

Colla libera convenzione di assumere come fondamentale l'entità di lunghezza e come derivate le altre due, si costituirà poi il sistema ordinario delle dimensioni geometriche e si giungerà finalmente al consueto gruppo delle trasformazioni delle equazioni della geometria:

$$l' = \lambda l \quad , \quad S' = \lambda^2 S \quad , \quad V' = \lambda^3 V \tag{2}$$

che evidentemente è un sottogruppo del gruppo (1).

5. Ai precedenti successivi passi nella posizione delle nozioni dell'omogeneità e della similitudine geometrica corrispondono esattamente omologhi successivi passi nelle posizioni delle corrispondenti nozioni fisiche.

Così, partendo da un omogeneità molto generale e specificando successivamente, a seconda di opportune teorie di dimensioni, si potrebbe giungere a diversi particolari sistemi di equazioni di trasformazione; per esempio, nel caso che si ammetta l'ordinaria teoria delle dimensioni e si assumano come fondamentali le entità lunghezza, tempo, massa, temperatura e quantità di elettricità, si giungerà alle equazioni:

(3)

$l' = \lambda l$	per le lunghezze	$m' = \mu m$	per le masse
$S' = \lambda^2 S$	per le superficie	$f' = \lambda\tau^{-2}\mu f$	per le forze
$V' = \lambda^3 V$	per i volumi	$E' = \lambda^2\tau^{-2}\mu E$	per le energie
. . . .	. . . .	$u' = \lambda^{-1}\tau^{-2}\mu u$	per le densità di energia
		. . . .	. . . .
$t' = \tau t$	per i tempi	$T' = \vartheta T$	per le temperature
$v' = \lambda\tau^{-1} v$	per le velocità	. . . .	. . . .
$a' = \lambda\tau^{-2} a$	per le accelerazioni	$e' = \eta e$	per le quantità di elettricità
$\nu' = \tau^{-1} \nu$	per le frequenze	$E' = \lambda\tau^{-2}\mu e E$	per l'int. del campo elet.
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Esse formano evidentemente un gruppo, sottogruppo di una serie di più ampi gruppi di trasformazione, che per brevità non abbiamo scritto, corrispondenti a fisiche più povere, che ignorassero in tutto o in parte i rapporti fra le diverse entità, per es. la possibilità di ricondurre le entità dinamiche a una geometrica, una cinematica e ad una qualsiasi di esse.

Colle equazioni (3) quindi non è affatto espressa la pura nozione di similitudine fisica, ma bensì ciò che essa diventa, dapprima, per certe deter-

minate ammissioni di relazioni fra le diverse entità e, in seguito, per al scelta di un determinato sistema di dimensioni. Ciò deve essere sempre tenuto presente quando si vogliano formare nuove teorie dell'omogeneità e della similitudine, convenienti a concezioni fisiche differenti dalle ordinarie. Nella terza Nota vedremo per es. come per porre una nozione di similitudine in accordo colla *teoria della relatività* occorra partire da nozioni, precedenti non solo a qualsiasi teoria di dimensioni, ma a qualunque ammissione di dipendenze o relazioni fra le diverse entità e scendere poscia alle particolari determinazioni, tenendo conto delle specialissime relazioni fra le entità fisiche, proprie di quella teoria, senza fidarsi di qualche illusoria coincidenza che possa ottenersi, per qualche caso particolare, mediante qualche speciale disposizione dei parametri arbitrarî λ, τ, μ, ϑ e η delle (3).

Principî dell'omogeneità e della similitudine.

6. Essi si riducono ormai semplicemente all'affermazione che le leggi della fisica devono sempre essere espresse con equazioni omogenee secondo la nozione precedentemente posta (*Principio dell'omogeneità*), oppure alla affermazione che esse devono essere tali, che sia sempre possibile concepire infiniti universi simili al nostro, ai quali si possa idealmente passare mediante equazioni di trasformazioni, da dedursi, a seconda della teoria delle dimensioni ammessa, in modo analogo a quello indicato nel paragrafo precedente (*Principio della similitudine*).

L'applicazione di questi principî alla verifica della logicità di risultati ottenuti per vie sperimentali o teoriche non presenta evidentemente nessuna difficoltà, quando si tenga conto delle dimensioni, non solo delle diverse entità fisiche, ma anche delle diverse costanti dimensionali, che in essi eventualmente intervengano.

E parimenti non presenta serie difficoltà l'applicazione di questi principî alla previsione delle leggi fisiche, che, in una data teoria, possano logicamente sussistere fra date entità, quando possa ritenersi escluso un intervento di costanti universali, come avviene per es. nelle applicazioni alla dinamica.

Ma assai gravi sono invece le difficoltà nel caso in cui sia prevedibile, o almeno non sia escluso, un intervento di tali costanti, poichè tale possibilità rende in generale il problema matematicamente indeterminato, in causa della deficienza della nostra conoscenza delle dimensioni delle costanti universali, che possono intervenire in una data teoria.

Infatti, anche sapendo, per es., che l'esperienza abbia dimostrato esistere in generale fra la temperatura T e la densità dell'energia irraggiata u una relazione del tipo

$$f(u, \mathrm{T}) = \mathrm{C},$$

ove C rappresenta una costante universale di dimensioni ancora ignote, non sarà evidentemente possibile di determinare la forma della f, e quindi prevedere la legge, applicando solamente il principio dell'omogeneità o della similitudine.

Come difficoltà di questo genere possano in generale essere risolte si vedrà nella Nota seguente.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 10°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 3°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 5.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 novembre 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 11.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 dicembre 1917.

Volume XXVI.° — Fascicolo 11°

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine $4\frac{1}{2}$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 dicembre 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geodesia. — *Sulla determinazione di porzioni della superficie del Geoide per mezzo di misure sopra di essa.* Nota del Socio V. Reina.

1. Alcune notevoli proprietà della superficie del Geoide vennero per la prima volta stabilite, facendo uso di considerazioni geometriche, dal professore Pizzetti [1]. La determinazione dei raggi principali di curvatura mediante misure geodetiche ed astronomiche fatte sulla superficie, ha formato l'oggetto di una mia successiva ricerca [2]. La questione venne poi ripresa dal prof. Viterbi [3], il quale fece fare un passo notevole alla soluzione del problema, mostrando come, sempre con misure geodetiche ed astronomiche, si possa pervenire alla determinazione dei coefficienti della forma differenziale quadratica che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare. Con tali coefficienti, e coi raggi principali di curvatura, vengono ad essere noti anche i coefficienti della seconda forma fondamentale, e si hanno quindi gli elementi necessari all'analisi intrinseca della superficie. Quando le dette osser-

[1] P. Pizzetti, *Contribuzione allo studio geometrico della superficie terrestre*, Giorn. della Soc. di lett. e convers. scient., Genova, 1887.

[2] V. Reina, *Sulla determinazione dei raggi di curvatura di una superficie per mezzo di misure locali sopra di essa*, Rendic. Accad. Lincei, Roma, 1893.

[3] A. Viterbi, *Sulla determinazione degli elementi intrinseci, fondamentali, della superficie terrestre, mediante misure locali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXV, 1908.

vazioni siano fatte in un numero sufficientemente fitto di punti, le coordinate cartesiane rettangolari dei punti della superficie, si possono ottenere mediante quadrature. Sull'argomento è poi tornato più recentemente il professore Mineo [1], facendo dipendere la soluzione del problema dalla determinazione dei coefficienti della seconda forma fondamentale, e precisando le condizioni alle quali questi debbono soddisfare.

Tanto nel mio lavoro quanto in quelli posteriori sopra citati, fissato un punto P delle superficie, si suppone di associare ad esso uno o due altri punti P_1, P_2 in *direzioni obbligate* uscenti da P. In tali punti debbonsi ripetere le osservazioni astronomiche già fatte in P e debbonsi inoltre misurare le distanze o basi PP_1, PP_2. Appare evidente come tale procedimento tolga di fatto ogni praticità alla soluzione, non sempre potendovi essere la possibilità, quando si operi sulla reale superficie terrestre, di trovare un punto adatto a fungere da stazione astronomica in una direzione obbligata, mentre questa ben raramente potrà prestarsi a compiere una operazione praticamente tanto difficile, qual è una misura di base.

Una soluzione pienamente suscettibile di essere attuata in pratica ho potuto conseguire tenendo un procedimento in certo qual modo inverso di quello suggerito dal prof. Viterbi, ed usufruendo diversamente delle formole e dei risultati contenuti nella sua bella ricerca.

Questo studio, del quale mi occupavo da tempo, ho voluto riprendere e completare in questi giorni, per portare un tributo d'onore alla memoria del valente Geodeta, che arruolatosi volontario al principio di nostra guerra, veniva ferito durante l'offensiva nemica del Trentino, veniva decorato di medaglia al valore, promosso Capitano del Genio per merito di guerra, ed il 18 del decorso novembre valorosamente cadeva sulla linea del Piave in difesa della Patria.

2. Si riferisca la porzione di superficie geoidica che si vuol studiare ad un sistema di assi ortagonali dei quali l'asse delle z sia parallelo all'asse della rotazione diurna. Condotta la normale PN in un punto generico P della superficie, positivamente verso l'esterno, cioè da quella parte verso la quale diminuisce la gravità, e la parallela PM all'asse polare, come è ben noto si dice *piano del meridiano astronomico* il piano MPN e *latitudine astronomica* (φ) di P il complemento dell'angolo MPN. *Longitudine astronomica* (ω) è l'angolo che il piano MPN forma con un piano fisso passante per l'asse della rotazione (*primo meridiano*), ed a questo piano si supporrà disposto parallelamente il piano xz. L'intersezione del piano MPN col piano tangente in P (*piano dell'orizzonte*) si dirà *linea cardinale Nord*, e la perpendicolare ad essa in detto piano *linea cardinale*

[1] C. Mineo, *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide*, Giorn. di Battaglini, vol. XLVIII, Napoli, 1910.

Est. Meridiano astronomico e *parallelo astronomico* si diranno le due linee del Geoide, passanti per P, lungo le quali è rispettivamente costante la longitudine o la latitudine.

Le direzioni positive delle tre rette fra loro ortogonali: normale alla superficie, retta cardinale Nord, retta cardinale Est, saranno definite dalle tre terne di coseni:

$$(1)\quad \begin{cases} X = \cos\varphi\cos\omega & Y = \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\omega & Z = \mathrm{sen}\,\varphi \\ X_n = -\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega & Y_n = -\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\omega & Z_n = \cos\varphi \\ X_e = -\,\mathrm{sen}\,\omega & Y_e = \cos\omega & Z_e = 0\,. \end{cases}$$

La cardinale Nord si intenderà quindi contata positivamente verso Nord, e la cardinale Est positivamente verso Est.

3. Si consideri una linea della superficie uscente da P e si indichi con θ il suo azimut, contato dalla direzione Nord positivamente verso Est. Con R_1 ed R_2 si denotino i due raggi principali di curvatura della superficie in P, raggi che si assumeranno come positivi, limitandoci alla considerazione del caso, sempre del resto fino ad ora verificato in pratica, che il Geoide rivolga all'esterno la sua convessità; e si indichi infine con θ_0 l'azimut della linea di curvatura alla quale corrisponde il raggio di curvatura R_1.

Se ds è l'elemento lineare PP′ della linea, e $d\varepsilon$ l'angolo fra le due normali alla superficie in P e P′, si ha per il teorema di Hamilton:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{\cos^2(\theta-\theta_0)}{R_1^2} + \frac{\mathrm{sen}^2(\theta-\theta_0)}{R_2^2}$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)\cos 2(\theta-\theta_0)$$

e questa si può scrivere

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = x + y\cos 2\theta + z\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

quando si ponga

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1^2}+\dfrac{1}{R_2^2}\right) \qquad y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1^2}-\dfrac{1}{R_2^2}\right)\cos 2\theta_0 \\ z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1^2}-\dfrac{1}{R_2^2}\right)\mathrm{sen}\,2\theta_0\,. \end{cases}$$

Se il valore di $\dfrac{d\varepsilon}{ds}$ viene determinato in corrispondenza a tre direzioni uscenti da P, e si formano le tre equazioni corrispondenti, si potranno de-

terminare le tre incognite $x\,y\,z$ e quindi per le (2) risulteranno determinati tanto i raggi di curvatura quanto l'orientamento delle linee di curvatura.

Se si fa la rappresentazione sferica Gaussiana della superficie, l'angolo elementare $d\varepsilon$, che non è poi altro che l'elemento lineare corrispondente a ds sulla sfera, è dato da

$$d\varepsilon^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\omega^2 .$$

Passando quindi da punti infinitamente vicini a punti aventi distanza finita Δs, se $\varphi\omega$. $\varphi'\omega'$ sono le coordinate astronomiche determinate agli estremi di Δs, si avrà:

$$(3) \qquad \Delta\varepsilon^2 = (\varphi' - \varphi)^2 + \cos^2\varphi(\omega' - \omega)^2$$

ed i valori di $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}$ sostituiti nella

$$(3') \qquad \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}\right)^2 = x + y \cos 2\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta$$

daranno le tre equazioni occorrenti per la determinazione di R_1, R_2 e θ_0. Meglio sarà se si dispone di un numero maggiore di punti intorno a P, perchè, potendosi allora applicare il metodo di risoluzione dei minimi quadrati, con tanta maggiore accuratezza verranno ad essere determinate le tre incognite R_1, R_2 e θ_0.

4. Nella rappresentazione sferica le linee del meridiano astronomico e del parallelo astronomico passanti per P hanno per corrispondenti il meridiano ed il parallelo della sfera incrociantisi ad angolo retto nel punto immagine π, e le tangenti a questi ultimi in π saranno parallele alla linea cardinale Nord ed alla linea cardinale Est rispettivamente.

È noto d'altra parte che, perchè due elementi lineari ds e δs uscenti da P sulla superficie siano coniugati, deve essere soddisfatta la condizione

$$dX\,\delta x + dY\,\delta y + dZ\,\delta z = 0$$

e questa esprime la ben nota proprietà che δs è ortogonale all'elemento corrispondente a ds nella rappresentazione sferica. Ne segue quindi che: *la tangente coniugata a quella del meridiano astronomico coincide colla direzione cardinale Est, e la direzione coniugata a quella del parallelo astronomico coincide colla direzione cardinale Nord.*

Questa proprietà venne per la prima volta dimostrata per via geometrica dal prof. Pizzetti.

Si indichino con α e β gli azimut del meridiano e del parallelo astronomico, e quindi con $\alpha - \theta_0$, $\beta - \theta_0$ gli angoli che essi formano colla linea di curvatura corrispondente al raggio R_1, contati sempre nel senso positivo. Essendo $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$ i semiassi della ellisse indicatrice, dovranno

essere soddisfatte per le due coppie di direzioni coniugate le due relazioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha-\theta_0)\operatorname{tg}(90-\theta_0) = -\dfrac{R_2}{R_1} \\ \operatorname{tg}(-\theta_0)\quad \operatorname{tg}(\beta-\theta_0) = -\dfrac{R_2}{R_1} \end{cases}$$

e queste, noti R_1, R_2 e θ_0, determineranno i due azimut α e β.

5. Sia

$$ds^2 = E d\varphi^2 + 2 F d\varphi\, d\omega + G d\omega^2$$

il quadrato dell'elemento lineare delle superficie in coordinate astronomiche (prima forma fondamentale) e si denotino come di solito con D, D', D'' i coefficienti della seconda formola fondamentale

$$D = -\sum \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial X}{\partial\varphi} \qquad D' = -\sum \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial X}{\partial\omega} = -\sum \frac{\partial x}{\partial\omega}\frac{\partial X}{\partial\varphi}$$

$$D'' = -\sum \frac{\partial x}{\partial\omega}\frac{\partial X}{\partial\omega}.$$

Tenendo presente che i coseni di direzione della linea cardinale Nord e della linea cardinale Est sono dati da

$$\frac{\partial X}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial Y}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial Z}{\partial\varphi}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial X}{\partial\omega},\quad \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial Y}{\partial\omega},\quad \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial Z}{\partial\omega}$$

rispettivamente, come risulta dalle (1) od anche dalla considerazione dell'elemento lineare della rappresentazione sferica, si avrà

$$(5)\qquad \sum \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial X}{\partial\varphi} = \cos\alpha \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial X}{\partial\omega} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$(6)\qquad \sum \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial X}{\partial\varphi} = \cos\beta \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial X}{\partial\omega} = \operatorname{sen}\beta$$

e quindi

$$(7\qquad \begin{cases} -D = \sqrt{E}\cos\alpha & -D' = \sqrt{E}\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi \\ -D' = \sqrt{G}\cos\beta & -D'' = \sqrt{G}\operatorname{sen}\beta\cos\varphi, \end{cases}$$

$$D'^2 = \sqrt{EG}\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\varphi.$$

Indicando con $d\sigma$ l'elemento superficiale del Geoide, con $d\Sigma$ quello corrispondente della sfera rappresentativa, si ha

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\omega \qquad d\Sigma = \cos\varphi\, d\varphi\, d\omega$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{d\Sigma}{d\sigma} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{EG - F^2}},$$

ed essendo d'altra parte

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \qquad \cos(\alpha - \beta) = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

si avrà

$$\sqrt{EG} = R_1 R_2 \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$$

$$D'^2 = R_1 R_2 \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta \cos^2\varphi}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)},$$

mentre dalle (7) e dalla seconda delle (8) si ricava

$$\text{(9)} \qquad E = R_1 R_2 \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \qquad G = R_1 R_2 \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos^2\varphi}{\cos\beta \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$$

$$F = R_1 R_2 \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) \cos\varphi .$$

Risultano così determinati, in funzione di grandezze osservate, tanto i coefficienti della prima quanto quelli della seconda forma fondamentale.

6. Si scrivano le (5) sotto la forma

$$\sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \cdot X_n = \cos\alpha \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \cdot X_e = \operatorname{sen}\alpha$$

e vi si aggiunga la relazione

$$\sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \cdot X = 0 .$$

Da queste si ricava

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial\varphi} = \cos\alpha \cdot X_n + \operatorname{sen}\alpha \cdot X_e$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial\varphi} = \cos\alpha \cdot Y_n + \operatorname{sen}\alpha \cdot Y_e$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial\varphi} = \cos\alpha \cdot Z_n$$

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = -\sqrt{E}(\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega) \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = -\sqrt{E}(\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\alpha \cos\omega) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} = \sqrt{E}\cos\alpha \cos\varphi . \end{cases}$$

Analogamente dalle (6), quando vi si aggiunga la relazione

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot X = 0 ,$$

si ricaverà

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \omega} = - \sqrt{G}\,(\cos\beta \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\omega) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \omega} = - \sqrt{G}\,(\cos\beta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\beta \cos\omega) \\ \dfrac{\partial z}{\partial \omega} = \sqrt{G} \cos\beta \cos\varphi . \end{cases}$$

Le (10) e (11) [1] permetteranno di determinare le coordinate dei punti della superficie geoidica mediante quadrature, a meno di una costante, quando in funzione di φ ed ω siano stati determinati i valori di α, β, E, G in un numero sufficientemente fitto di punti.

A forma più semplice si riducono le (10) e (11) quando, invece di E, G, per le (7), si sostituiscano D, D′, D″, ottenendosi allora

$$(10') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = D \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \dfrac{D'}{\cos\varphi} \operatorname{sen}\omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = D \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \dfrac{D'}{\cos\varphi} \cos\omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = - D \cos\varphi \end{cases}$$

$$(11 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \omega} = D' \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \dfrac{D''}{\cos\varphi} \operatorname{sen}\omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \omega} = D' \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \dfrac{D''}{\cos\varphi} \cos\omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial \omega} = - D' \cos\varphi . \end{cases}$$

Riesce più facile stabilire con queste che non colle (10) e (11) le condizioni di integrabilità. Esse conducono alle equazioni di Mainardi-Codazzi

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial D''}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial D'}{\partial \omega} + D \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + D'' \operatorname{tg}\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial D}{\partial \omega} - \dfrac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \operatorname{tg}\varphi = 0 . \end{cases}$$

[1] Le formole (10) e (11) si trovano nella Memoria del Viterbi, e le (10′) e (11′) colle relative condizioni di integrabilità in quella di Mineo.

7. Ecco quindi come si può procedere praticamente per determinare la considerata porzione di superficie geoidica. Si traccia su di essa una rete trigonometrica, e sarà bene che i triangoli siano di piccole dimensioni, ed i vertici riescano quindi molto fitti. Le dimensioni della rete potranno risultare da un'unica misura di base e da misure angolari. Si faccia in ogni vertice una determinazione di latitudine, di longitudine e di azimut. Se φ, ω sono le coordinate astronomiche di un vertice P e φ', ω' quelle di uno P' dei vertici circostanti, si potrà colla (3) calcolare l'angolo fra le verticali in P e P' e stabilire tante equazioni del tipo (3') quanti sono i lati uscenti da P. La loro risoluzione fatta col metodo dei minimi quadrati permetterà di determinare i due raggi di curvatura R_1, R_2 della superficie in P e l'azimut θ_0 della linea di curvatura corrispondente al raggio R_1. Dalle (4) si ricaveranno allora i valori di α e β (azimut del meridiano astronomico e del parallelo astronomico), mentre le (7) e (9) condurranno alla determinazione dei coefficienti E, G, D, D', D'' delle due forme fondamentali. Conosciuti questi valori nei vertici della rete e determinandone per interpolazione i valori nei punti intermedî, le (10) e (11) oppure le (10') e (11') permetteranno di determinare per quadrature, a meno di una costante, in funzione di φ ed ω, le coordinate cartesiane dei punti della superficie.

Tenuto presente che la superficie del Geoide non è suscettibile nel suo complesso di un'unica rappresentazione analitica, ma è piuttosto da considerarsi come risultante dalla connessione di porzioni di superficie analitiche diverse, nell'applicare il procedimento sopra indicato bisognerà aver riguardo di non oltrepassare i limiti dove, a causa di rapide variazioni di densità della crosta terrestre, possano verificarsi discontinuità nei valori di R_1, R_2 e θ_0. L'essere o meno soddisfatte dai valori sperimentali le equazioni (12) costituirà una prova dell'essersi tali limiti oppur no oltrepassati.

Un'ultima osservazione resta a fare: le misure geodetiche ed astronomiche vengono eseguite sulla superficie fisica terrestre, mentre la considerata rete trigonometrica si suppone tracciata sulla superficie del Geoide, ma è ben noto che la riduzione delle misure considerate (basi, latitudini, longitudini, azimut) al Geoide, od a livello del mare, costituisce uno dei problemi della Geodesia dei quali già si possiede una soddisfacente soluzione.

Matematica. — *Hamiltoniani e gradienti di hamiltoniani e di gradienti, laplassiani, parametri differenziali.* Nota I di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

La presente Nota, e due altre che le faranno seguito sull'argomento, sono collegate con quelle che già fecero comparsa nei Rend. della R. Acc. di Napoli [1], ed in questi medesimi Rendiconti [2] relative ad hamiltoniani e gradienti, e con un'altra che comparirà prossimamente nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo [3]. Tenuto conto che, dalla applicazione di hamiltoniani e di gradienti, ad una funzione scalare od estensiva U a più variabili, nascono di nuovo funzioni scalari ed estensive, la quistione di esaminare come si presentano gli hamiltoniani ed i gradienti di hamiltoniani e di gradienti d'una stessa funzione U, nelle loro forme di riduzione ultimata (forme *tipiche*), diviene essenziale, non soltanto per la necessità d'imprimere rapidità di maneggio al calcolo in tutte quelle volte nelle quali siffatti operatori entrano in giuoco, ma pure perchè, con la quistione istessa vengono a far comparsa nuove funzioni invariantive e nuove relazioni, fra cui qualcuna apparve già (da altri punti di vista), in ricerche coordinate ai potenziali in più variabili (cfr. specialmente la 2ª delle altre due Note suddette).

Le funzioni da esaminare (per le definizioni e le notazioni ci manteniamo conformi ai lavori precedenti) in simboli si presentano come segue:

$$(1) \qquad \nabla_\Omega(G_\Omega U) \;,\quad G_\Omega(\nabla_\Omega U) \;,\quad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) \;,\quad G_\Omega(G_\Omega U)\,;$$

ma, di esse, soltanto le prime tre, e l'ultima parzialmente, vengono ad essere prese in considerazione nella presente Nota.

1° caso: $\nabla_\Omega(G_\Omega U)$. Dalla definizione stessa di ∇_Ω e G_Ω segue essere

$$\nabla_\Omega(G_\Omega U) = \nabla_\Omega \left\{ \frac{\partial U}{\partial \omega_1} E_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega_2} E_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega_m} E_m \right\};$$

[1] *Gli hamiltoniani ed i gradienti* etc. (NI, NII), 1 ed 8 luglio 1916; *Gli hamiltoniani ed i gradienti rispetto a formazioni non interamente libere*, 7 novembre 1916.

[2] *Gli hamiltoniani ed i gradienti di formazioni estensive* etc., fasc. 6°, settembre 1916; *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti* etc., fasc. 7°, 8 ottobre 1916; *Gli hamiltoniani ed i gradienti del prodotto di due formazioni estensive*, fasc. 9°, 5 novembre 1916.

[3] *Hamiltoniani e gradienti particolari nell'analisi* etc., novembre 1917 (in appresso verrà indicata con « N. Ist. L. ».

e quindi, visto che $G_\Omega U$ è di specie ρ, sarà $\nabla_\Omega(G_\Omega U)$ eguale alla divergenza di $G_\Omega U$ (N. Ist. L., n. 1); cioè si avrà

$$\nabla_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^{\rho\rho'}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_m}\right). \tag{2}$$

2° caso: $G_\Omega(\nabla_\Omega U)$. Analogamente a quanto si è testè detto, tenuto conto che $\nabla_\Omega U$ è di specie $\rho' = n + 1 - \rho$, si ha

$$G_\Omega(\nabla_\Omega U) = (-1)^{\rho\rho'}\left\{G_\Omega(-1)^{\rho\rho'}\frac{\partial U}{\partial\omega_1}|E_1 + \cdots + G_\Omega(-1)^{\rho\rho'}\frac{\partial U}{\partial\omega_m}|E_m\right\} \tag{3}$$

$$= G_\Omega\frac{\partial U}{\partial\omega_1}|E_1 + G_\Omega\frac{\partial U}{\partial\omega_2}|E_2 + \cdots + G_\Omega\frac{\partial U}{\partial\omega_m}|E_m;$$

ovvero, per essere $(E_i|E_i) = 1$, $(E_i|E_k) = 0$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$:

$$G_\Omega(\nabla_\Omega U) = \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_m^2}. \tag{4}$$

La funzione scalare, a secondo membro della (4), sarà detta *laplassiano* della U, e sarà indicata con $L_\Omega U$. Così, mentre per le (2), (4) possiamo simbolicamente scrivere

$$\nabla_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^{\rho\rho'} L_\Omega U, \quad G_\Omega(\nabla_\Omega U) = L_\Omega U,$$

da cui deducesi

$$L_\Omega U = G_\Omega(\nabla_\Omega U) = (-1)^{\rho\rho'}\nabla_\Omega(G_\Omega U), \tag{5}$$

in linguaggio ordinario possiamo dire:

α) *Il gradiente [l'hamiltoniano] dell'hamiltoniano [del gradiente] di una funzione scalare* U *eguaglia l'hamiltoniano [il gradiente] moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'}$, *del gradiente [dell'hamiltoniano] di* U, *e vale il laplassiano di* U *[moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'}$*]; sicchè:*

β) *Il laplassiano di una funzione scalare* U *mentre eguaglia sempre il gradiente dell'hamiltoniano di* U, *eguaglia l'hamiltoniano del gradiente di* U, *soltanto rispetto a formazioni di specie pari in qualunque spazio e rispetto a formazioni di specie dispari in ispazii a numero pari di dimensioni.*

In grazia della definizione di *divergenza* (cfr. N. Ist. L.) di una funzione estensiva, quando per questa si prende $G_\Omega U$, e del 1° caso precedente, a fianco della (5) possiamo scrivere

$$L_\Omega U = (-1)^{\rho\rho'} D_\Omega(G_\Omega U); \tag{6}$$

vale a dire, in linguaggio ordinario:

Il laplassiano di una funzione scalare U *vale la divergenza, moltiplicata per* $(-1)^{\rho\rho'}$, *del gradiente di* U. — Con significato evidente per

le abbreviazioni di parole introdotte, ma con l'intesa che non è opportuno abusarne nei calcoli, anche per l'incertezza che potrebbe seguire dalla completa soppressione della Ω, alle (5), (6) potrebbero sostituirsi le seguenti:

$$\text{grad ham U} = (-1)^{\rho\rho'} \text{ ham grad U} = \text{lap U} \tag{5'}$$

$$\text{lap U} = (-1)^{\rho\rho'} \text{ div grad U}\,; \tag{6'}$$

sicchè, *in ogni spazio rispetto a formazioni d'ordine pari, ed in ispazii ad un numero pari di dimensioni pure rispetto a formazioni d'ordine dispari, vale la relazione*

$$\text{lap U} = \text{div grad U}\,, \tag{7}$$

mentre che negli spazii ad un numero dispari di dimensioni, rispetto a formazioni d'ordine dispari, vale l'altra

$$\text{lap U} = -\text{div grad U}\,. \tag{7'}$$

Un breve esempio al riguardo non è senza interesse presentarlo qui. Sia Ω, nello spazio ordinario *misto* di punti e vettori, il *punto* (o il *vettore*)

$$\Omega = e + xi + yj + zk \quad (\text{o } \Omega = xi + yj + zk) \tag{8}$$

e sia $U(x, y, z)$ una funzione di esso punto (o vettore); siccome si ha, per entrambi i casi, $n = 3$, $\varrho = 1$, $\varrho' = n + 1 - \varrho = 3$, così sarà

$$\text{div grad U} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \tag{8'}$$

Se, in vece, si suppone Ω essere un vettore nello *spazio vettoriale puro*, ed U la medesima funzione testè considerata; siccome, in tal caso, si ha $n = \varrho' = 2$, $\varrho = 1$, così sarà

$$\text{div grad U} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,. \tag{8''}$$

3° caso. $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$. Dalla espressione del ∇_Ω per funzioni scalari segue essere:

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = \nabla_\Omega \left\{ (-1)^{\rho\rho'} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} |E_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega_2} |E_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega_m} |E_m \right) \right\}; \tag{9}$$

e quindi, poichè ora è (con riferim. alla espress. di $\nabla_\Omega U$, per U di specie σ)

$$\sigma = \varrho'\,, \quad \varrho' + \sigma < n + 1\,, \quad \text{d'onde} \quad 2\varrho' < n + 1\,, \quad \text{sarà:}$$

$$(9') \quad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = (-1)^{\rho'(n+1)} \Big\{ \nabla_\Omega\Big(\frac{\partial U}{\partial \omega_1} | E_1\Big) + \nabla_\Omega\Big(\frac{\partial U}{\partial \omega_2} | E_2\Big) + \cdots + \nabla_\Omega\Big(\frac{\partial U}{\partial \omega_m} | E_m\Big) \Big\} =$$

$$= (-1)^{\rho'} \Big\{ \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_1 \, \partial \omega_2} [|E_1|E_2 + |E_2|E_1] + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_1 \, \partial \omega_3} [|E_1|E_2 + |E_2|E_1] + \cdots +$$

. . . .

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} [|E_i|E_k + |E_k|E_i] + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_{m-1} \, \partial \omega_m} [|E_{m-1}|E_m + |E_m|E_{m-1}]$$

con $i < k$, dopo avere osservato che, a fianco del fattore $(-1)^{\rho'(n+1)}$, si presenta ancora il fattore $(-1)^{\rho\rho'}$, che $\rho'(n+1) + \rho\rho' \equiv \rho' \pmod 2$ e che $E_i | E_k = 0$ per tutti i valori distinti di i, k da 1 ad m. In una forma concisa, la formula precedente sarà scritta:

$$(10) \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = (-1)^{\rho'} \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} | (E_i E_k + E_k E_i)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, m; \; i < k).$$

Se, con $\rho' = \sigma$, è $\rho' + \sigma = n + 1$, ovvero $2\rho' = n + 1$ l'espressione (10) pel $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$ rimane immutata; ma se, con $\rho' = \sigma$, è $\rho' + \sigma > n + 1$, cioè $2\rho' > n + 1$, allora il calcolo precedente circa la potenza di -1 che deve accompagnare l'espressione a 2° membro della (10), porta che deve essere $(-1)^\rho$. Così, per $2\rho' \leq n + 1$, ovvero per $2\rho \geq n + 1$ si ha la (10), e per $2\rho' \geq n + 1$, cioè $2\rho \leq n + 1$, si ha la

$$(10') \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = (-1)^{\rho} \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} | (E_i E_k + E_k E_i).$$

Ma, se $\rho \geq \rho'$, cioè se $2\rho \geq n + 1$, si ha

$$(11) \qquad E_k E_i = (-1)^{\rho'^2} E_i E_k = (-1)^{\rho'} E_i E_k \qquad (i, k \text{ come sopra});$$

e se è, invece, $\rho \leqq \rho'$, cioè se $2\rho \leqq n + 1$, si ha

$$(11') \qquad E_k E_i = (-1)^{\rho^2} E_i E_k = (-1)^{\rho} E_i E_k \qquad (i, k \text{ idem});$$

dunque: Se $2\rho \geq n + 1$, dalla sostituzione in (10) di (11) si ha

$$(12) \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = [1 + (-1)^{\rho'}] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} | E_i E_k \quad (i, k \text{ come sopra});$$

e se $2\rho \leqq n + 1$, dalla sostituzione in (10') della (11') si ha

$$(12') \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = [1 + (-1)^{\rho}] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} | E_i E_k \quad (i, k \text{ come sopra}).$$

Intanto, notiamo subito che, *se ϱ' è dispari*, cioè se ϱ ed $n+1$ sono di parità diversa (ovvero se ϱ ed n sono della stessa parità, voglio dire se sono della stessa parità la specie della formazione Ω ed il numero n delle dim. dello spazio in cui si opera) *e se è $\varrho \geq \varrho'$, la* (12) *fornisce*

$$\nabla_{\Omega}(\nabla_{\Omega}U) = 0 . \tag{13}$$

Ed in modo analogo, *se ϱ è dispari ed è $\varrho \leq \varrho'$ questa medesima* (13) *è fornita dalla* (12'). Ne concludiamo che, *eccettuato i casi in cui sia ϱ' pari e $\varrho \geq \varrho'$*, ovvero *sia ϱ pari e $\varrho \leq \varrho'$, l'hamiltoniano dell'hamiltoniano d'una funzione scalare U è identicamente nullo. — Nei casi eccettuati*, dalla (12) per ϱ' pari e $\varrho \geq \varrho'$ ovvero $2\varrho \geq n+1$, e dalla (12') per ϱ pari e $\varrho \leq \varrho'$ ovvero $2\varrho \leq n+1$, si ricava che *l'espressione dell'hamiltoniano dell'hamiltoniano di una funzione scalare U ha la forma di tipo unico seguente*:

$$\nabla_{\Omega}(\nabla_{\Omega}U) = 2\sum \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i\,\partial\omega_k}|E_i\,E_k \qquad (i\,,k = 1\;2\,,\ldots,m\,;\,i<k) . \tag{14}$$

Attenzione speciale merita il caso in cui sia $2\varrho \leq n+1$ e ϱ *pari*; ma di esso sarà fatto rilievo nella Nota successiva.

Fisica matematica. — *Omogeneità delle Equazioni e Similitudine nella Fisica.* Nota II di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente Di Legge.

Criterii per l'applicazione dei Principii precedenti.

1. Per proseguire nella ricerca iniziata nella Nota precedente, sono indispensabili alcune considerazioni generali sui criterî tipici coi quali vengono ordinariamente applicati i principî dell'Omogeneità e della Similitudine.

Possiamo dividerli in due categorie nettamente distinte.

La prima comprenderà i metodi che procedono dalla considerazione di infiniti sistemi astratti, simili a quello che si vuol studiare secondo rapporti di similitudine completamente arbitrarî per le entità fondamentali e in accordo colla teoria delle dimensioni per le altre, e cercano le relazioni fra entità fisiche che rimangano invariate quando si passi dall'uno all'altro di detti sistemi.

La seconda comprenderà invece i metodi che procedono dalla considerazione di sistemi simili, ai cui rapporti di similitudine siano stati imposti opportuni vincoli, in modo che possa rimanere invariato qualche elemento essenziale di questi sistemi; per es. alcune proprietà caratteristiche del mezzo in cui avvengono i fenomeni, o del fluido su cui galleggiano i corpi si-

mili, ecc. Tali sistemi dovranno essere considerati in numero infinito, quando si tratti di stabilire leggi generali e in numero limitato, quando si tratti invece di stabilire le norme per dedurre poi sperimentalmente qualche legge pratica.

Consideriamo ora partitamente i metodi particolari di queste due categorie.

2. Quando le condizioni fisiche sono tali che non occorra porre alcun vincolo ai rapporti di similitudine, le applicazioni avvengono ordinariamente secondo due metodi, che si potrebbero opportunamente distinguere, come qualche volta fanno i fisici inglesi, colle denominazioni di *metodo delle dimensioni* e di *metodo della similitudine.*

Il primo applica più direttamente la nozione dell'omogeneità delle equazioni e riconduce il problema della ricerca delle relazioni fra diverse entità fisiche, che rimangono invariate passando da un sistema ad un altro simile, a quello della ricerca dei prodotti delle potenze di tali entità che non abbiano dimensioni fisiche, o che, come si dice comunemente, siano di dimensioni nulle. Per fissare le idee, ricordiamo il noto esempio della deduzione dell'equazione del pendolo dalla considerazione che i soli prodotti di dimensioni fisiche nulle, della forma $t\,l^{\alpha}\,g^{\beta}$, ove t indica un tempo, l una lunghezza e g un'accelerazione, sono rappresentati dal prodotto $t\,l^{-\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}$ e dalle sue potenze, per modo che la legge del pendolo, che appunto esprime una relazione fra le entità t, l e g, non può essere che la nota legge

$$t = \text{Cost. numerica} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Il secondo applica più direttamente la nozione di similitudine, ponendo senz'altro l'equazione che esprime l'invarianza delle relazioni fra certe entità fisiche al passare da un sistema ad un altro sistema simile. Nel caso del pendolo, per es., si pone l'equazione funzionale

$$f(t\,,l\,,g) = f(t'\,,l'\,,g') = 0\,,$$

che, per le formule di trasformazione (3) della Nota precedente, diviene

$$f(t\,,l\,,g) = f(\tau t\,,\lambda l\,,\lambda\tau^{-2} g)\,,$$

la quale ammette appunto per la f solamente la determinazione corrispondente alla legge del pendolo.

Questi due metodi, dei quali manca tuttora una trattazione completa e sistematica, sono sempre applicabili quando si conoscano *a priori* le dimensioni di tutte le entità fisiche e di tutte le costanti dimensionali (universali o individuali) che possono intervenire. Furono perciò applicati ampiamente e senza incertezze nelle questioni riguardanti la dinamica, ma

scarsamente e con molte riserve nelle questioni della fisica, ove è inevitabile l'intervento delle costanti universali, delle quali la nostra conoscenza è assai limitata.

Osserviamo fin d'ora che se noi potremo affermare che tutte le possibili costanti universali di una data teoria debbano essere esprimibili mediante un numero limitato di costanti universali fondamentali, oppure anche solamente avere le loro dimensioni sottoposte ad un determinato vincolo, i due metodi precedenti diverranno senz'altro applicabili in generale a quella stessa teoria fisica, purchè si tenga conto del possibile, eventuale intervento di tali costanti.

3. Passiamo ora al caso in cui convenga per qualche ragione sottoporre i rapporti fondamentali di similitudine a qualche vincolo.

Opportune limitazioni nei rapporti di similitudine sono considerate esplicitamente e di proposito deliberato, quando si tratta di realizzare effettivamente qualche sistema simile su cui esperimentare, valendosi dei soli mezzi che è possibile avere a nostra disposizione. Si comprende che le difficoltà sono allora gravissime, perchè, mentre si può disporre di limitati rapporti di similitudine, le diverse proprietà fisiche dei corpi e le loro influenze sulle esperienze sono invece numerosissime. Non può quindi sorprendere che, mancando anche di questo argomento una trattazione sistematica, quasi ogni applicazione abbia dato luogo a critiche e discussioni. Lasciamo quindi per ora da parte quest'ultima classe di applicazioni.

Però ricordiamo fin d'ora che, trattando questioni fisiche, sono state qualche volta introdotte limitazioni nei rapporti di similitudine, anche quando non si trattava di realizzare effettivamente qualche determinato sistema simile, ma si voleva solamente limitare la considerazione astratta dei sistemi simili a quelli che possono concepirsi nell'àmbito di una determinata teoria, per es. nell'etere interpretato secondo la teoria di Maxwell.

Si giungeva così a particolari forme di applicazione del principio di similitudine specialmente convenienti per alcune date teorie.

Ma il fatto che tali limitazioni nei rapporti di similitudine venivano generalmente giustificate con ragionamenti di altra indole, ha indotta l'errata convinzione che possa esistere un principio di similitudine, avente un valore effettivamente fisico e non puramente metodologico. Invece esso, nella sua forma generale, non ha, e non può avere, alcun rapporto con nessuna speciale teoria fisica, ma solamente col sistema delle dimensioni che è stato scelto. Nelle sue forme particolari, coi diversi rapporti sottoposti a vincoli più o meno ristretti, esso non è che l'espressione di ciò che diverrebbe il principio generale, quando lo si sottoponesse alla condizione di dover lasciare invariate, per qualsiasi possibile trasformazione, alcune date espressioni dimensionali. È quindi evidente che, *quando si potesse affermare* che le costanti universali di una data teoria debbano soddisfare a una certa

espressione dimensionale, la forma particolare del principio di similitudine che lascierà sempre invariata tale espressione potrà rendere ottimi servigi, permettendo essa di eliminare senz'altro la difficoltà, ripetutamente rilevata, dell'eventuale intervento, nelle nostre formole. delle costanti universali, e ciò senza doverle considerare esplicitamente ogni volta, come si dovrebbe nel caso del n.° 2.

Vedremo in una Nota seguente come, per es. il Principio della similitudine del Tolmann, sia appunto una praticissima forma di applicazione del principio generale, nell'ipotesi che esso abbia sempre a considerare solamente costanti universali sottoposte a un certo vincolo; e che quindi questo principio avrà un notevole valore, quando sarà dimostrato, ciò che dall'esposizione di esso non risulta, che quel vincolo corrisponde appunto, anzi è equivalente, all'interpretazione dei fenomeni fisici mediante i principî della termodinamica e della elettrodinamica di Maxwell.

Ma vedremo pure che potremo far corrispondere a qualsiasi teoria logica, sia essa o no confermata dalla nostra esperienza, per es. alla teoria dell'emissione della luce, principî di similitudine perfettamente analoghi.

Perchè quanto precede abbia una base è però necessario di ammettere, come abbiamo ripetutamente accennato, una stretta correlazione fra teorie fisiche e costanti universali. Essa risulta, infatti, da un mio studio in corso di pubblicazione e che riassumerò brevissimamente nel paragrafo seguente.

Relazioni generali fra teorie fisiche e costanti universali.

4. Le dimensioni di una costante dimensionale della fisica possono venire espresse per mezzo delle dimensioni di un certo numero di altre costanti, che perciò assumerebbero il carattete di costanti fondamentali. Posto a base il sistema di dimensioni l, t, m, T ed e della Nota precedente, le dimensioni di una generica costante possono in generale essere espresse mediante l'equazione dimensionale:

$$(1) \qquad [l^{\lambda}\, t^{\tau}\, m^{\mu}\, \mathrm{T}^{\vartheta}\, e^{\eta}] = \left[\prod_{i=1}^{i=5} (l^{\lambda_i}\, t^{\tau_i}\, m^{\mu_i}\, \mathrm{T}^{\vartheta_i}\, e^{\eta_i})^{\alpha_i}\right],$$

quando le costanti fondamentali $(l^{\lambda_i}\, t^{\tau_i}\, m^{\mu_i}\, \mathrm{T}^{\vartheta_i}\, e^{\eta_i})$ soddisfacciano a certe condizioni algebriche che non è difficile stabilire.

Ciò premesso, se ci chiediamo se sia ammissibile che costanti universali, soddisfacenti a quelle condizioni, possano appartenere tutte ad una data interpretazione fisica (costituita da una o più teorie concordanti fra di loro), dobbiamo rispondere in modo recisamente negativo. Tale ammissione, infatti, toglierebbe alle teorie fisiche il loro carattere essenziale, di poter ammettere certe leggi e di non poter ammetterne certe altre, perchè sarebbe allora sempre possibile di comporre, per mezzo di quelle costanti fondamentali,

altre costanti universali di dimensioni tali, da rendere logicamente possibile qualsiasi legge arbitrariamente data. Per es. finchè ammettiamo, che le dimensioni di tutte le costanti universali C, che possono intervenire eventualmente nella teoria di Maxvell, debbano tutte essere esprimibili mediante le dimensioni di due di esse (per. es. della costante dielettrica ε e della permeabilità magnetica μ, oppure di una delle due e della velocità della luce c), le note relazioni fra la densità dell'energia elettrica u_c e magnetica u_m e le rispettive forze elettriche E e magnetiche H in un punto qualsiasi vuoto

$$u_c = C_1 E^2 \qquad e \qquad u_m = C_2 H^2$$

saranno caratteristiche per la detta teoria, come le sole relazioni logicamente possibili, in essa, fra le u ed E da una parte, le u ed H dall'altra ed una generica costante C. Ma se togliessimo, o modificassimo, questo vincolo relativo alla C, ed ammettessimo la possibilità dell'intervento, nell'espressione delle loro dimensioni, sia pure di una sola costante fondamentale di dimensioni indipendenti da quella delle due altre già scelte, fra le stesse entità u, E ed H diverrebbero immediatamente possibili infinite altre relazioni, altrettanto logiche che le precedenti.

Se poi, procedendo in quest'ordine di idee, ricerchiamo a quali vincoli debbano essere sottoposte le dimensioni delle costanti universali di una data teoria, perchè possa essere evitato l'inconveniente anzidetto, repugnante ad ogni nostra concezione di teoria fisica, potremo concludere che basterà ammettere, che esse debbano soddisfare a k equazioni lineari fra le λ, τ, μ, ϑ ed η, k essendo sempre minore di 5.

Ciò appunto si verifica in tutte le teorie logicamente possibili.

Ma quello che più interessa è, che è possibile di dimostrare come questo vincolo sia caratteristico per la teoria, tanto che la sua semplice ammissione equivale ad ammettere tutte le leggi fondamentali della teoria stessa.

E così nella teoria elettrodinamica di Maxwell le costanti sono sottoposte al vincolo di soddisfare alle equazioni lineari

$$(2) \qquad 2\lambda + 2\tau + \eta = 0 \qquad e \qquad \mu - \lambda - \tau = 0\,;$$

e reciprocamente, l'ammissione di tale vincolo basta a dedurre tutte le leggi di quella teoria.

Nella teoria dell'irraggiamento termico, fondata sulla teoria di Maxwell e sui principî della termodinamica, il vincolo può essere espresso colla sola equazione

$$(3) \qquad \lambda + \tau - \mu - \vartheta = 0\,,$$

dalla cui sola ammissione si possono ricavare tutte le leggi fondamentali di quella teoria.

La teoria dell'irraggiamento, invece, che si potrebbe logicamente fondare sulla teoria dell'emissione e sulla termodinamica (e che è talvolta molto istruttivo di paragonare colla teoria ora ammessa, nello stesso modo che è talora utile paragonare colla nostra la geometria non euclidea) è tutta contenuta nell'ammissione che il vincolo in questione sia dato dall'equazione

$$\lambda + \tau - 2\mu - 2\vartheta = 0. \tag{4}$$

L'ipotesi del paragrafo precedente, che fra le dimensioni delle costanti di una data teoria debba esistere un vincolo, corrisponde quindi alla realtà e di essa ci varremo per sviluppare, nella Nota seguente, le diverse forme di applicazione del principio della similitudine.

Geologia. — *Sul riconoscimento nelle regioni italiane dell'eocene autoctono.* Nota di G. Rovereto, presentata dal Corrisp. Arturo Issel.

Ho accennato, nelle Note precedenti, a varie condizioni, le quali sono risultate estese a gran parte degli Appennini, e che dimostrano come la serie eocenica, per quasi tutta la sua estensione, faccia parte delle falde di ricoprimento. Ora occorre stabilire, come si possano riconoscere le zone in cui l'eocene non è compreso in tali falde, ed è per questo *autoctono*. Le osservazioni che seguono non portano a dettami generali, ma solo alla soluzione di alcuni casi.

Quando riuscii a dimostrare [1], che il calcare triassico di Monte Gazzo, lungo la nota *zona di coincidenza* fra eocene e mesozoico, ambedue ofiolitici, della Liguria occidentale, è la *cerniera* di una falda di ricoprimento, raddrizzata a forma di anticlinale, posi anche la questione, lasciata da me in parte insoluta, dei rapporti dell'eocene con tale falda mesozoica. Chi esaminò, o riprese, le mie ricerche, venne a due conclusioni opposte, e non affatto accettabili: il Termier e il Boussac [2] vollero che il creduto eocene sia una *facies*, a differente metamorfismo, dei calcescisti mesozoici; il De Stefani [3] assicurò che questi calcescisti sono una *facies* degli scisti eocenici.

La soluzione che ora propongo abbraccia cognizioni antiche e constatazioni nuove, ed è la seguente: lungo la zona di coincidenza l'eocene è autoctono, e la zona mesozoica, a falde di ricoprimento, deve essere considerata, rispetto a esso, come un massiccio di corrugamento anteriore.

(1) Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXVIII (1909).
(2) C. R. Acad des Sc., vol. 152, pag. 1361 (1911).
(3) Rend. Accad. Lincei, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem. (1913).

Si osserva infatti, in modo evidente, che le masse dei calcari retici e triassici, le quali vengono a contatto con gli scisti argillosi eocenici, sono di un piegamento più antico di questi: in Corsica, dove si continua la stessa coincidenza, l'erosione ha scoperto la parete di un'antica falesia marina, incisa nei calcari a *Megalodon*, che sono soprastanti alla stazione di Omessa; e alla base di questa parete, contro di essa pigiati, stanno gli scisti eocenici, i quali contengono massi arrotondati e ciottoli ben conservati del calcare, e ciò con tanta evidenza, che quasi si può dubitare, che tali scisti siano più recenti di quanto si ritiene.

Quindi questo eocene è nel posto in cui si è depositato, ossia è sopra e contro una falda di ricoprimento anteriore, e che il suo mare ha intaccata; e se in qualche tratto è ricoperto dalla serie mesozoica, ciò è dovuto, o al *carreggiamento continuato*, o alla manifestazione di nuove falde contemporanee a quelle dalle quali esso stesso è, al di fuori della zona autoctona, trasportato.

In questo tratto autoctono, l'eocene consta, specialmente sul versante tirreno, di due *membri stratigrafici* principali, che si dividono in varie *zone di sedimentazione*: il membro superiore è costituito dai calcari a elmintoidi, che formano una larga zona sinclinale a più pieghe, compresa fra le valli della Polcevera e della Fontanabuona; lungo di quest'ultima corre l'asse di una zona anticlinalica, e al di là si ha la formazione del macigno superiore, che è una *sostituzione laterale* dei calcari: il membro inferiore ha tre zone di sedimentazione, quella degli scisti lucidi argilloso-calcarei della Polcevera, con le ofioliti del Chiaravagna; l'altra degli scisti policromi e galestrini della valle del Bisagno; la terza quella degli scisti ardesiaci e degli scisti argillosi della Fontanabuona. Con tutta probabilità i due membri spettano, secondo un antico riferimento mio e di altri geologi, all'eocene superiore ([1]), anzi mi pare che in massima possiamo avvicinarsi all'opinione del Franchi ([2]), considerando ludiani o priaboniani i calcari a elmintoidi, e bartoniani gli scisti ([3]).

Quindi, la falda mesozoica, che è di base all'eocene superiore autoctono, deve essersi formata durante i movimenti anteriori al luteziano, i quali hanno prodotto in tutta la catena alpina la cosidetta *trasgressione mesonummulitica*; le falde interessanti l'eocene superiore in ricoprimento debbono, per

([1]) Atti Soc. Ligustica di Sc. Natur. e Geogr., vol. III (1892).

([2]) Boll. Comit. Geol., vol. XLV (1916).

([3]) In Val Trebbia, nella parte superiore degli scisti galestri, ho trovato dei tronchi lignitizzati, contenenti la *Teredo anceps* Schaur., che è del priaboniano tipico: ho constatato inoltre, che ivi la serie scistosa con ofioliti posa sul calcare marnoso, secondo una mia recente scoperta, a globigerine e nummuliti, di M. Penice, che credo di dover riferire all'auversiano: ma su di ciò ritornerò in altra occasione.

le considerazioni fatte nella seconda di queste note [1], e per la condizione che ora si è posta in chiaro, risalire agli ultimi tempi del periodo.

Non ho ancora potuto limitare, in modo sicuro, verso oriente, ossia dalla parte opposta alla zona di coincidenza, questo tratto di eocene autoctono, benchè l'esistenza di una immediata *zona di ricoprimento* sia accertata dal modo di assètto del mesozoico del Golfo della Spezia [2]. È quasi certo, che questa si estende sin dove le pieghe della Liguria orientale conservano la direzione diagonale, la quale è caratteristica della *scaglia di ricoprimento* del promontorio occidentale del Golfo; ma siccome queste pieghe sono in gran parte negli scisti argillosi, così è difficile il riconoscerle. Abbiamo però il fatto, che anche le grandi masse ofiolitiche della regione sono allineate secondo una direzione diagonale all'Appennino, e che per di più, una linea quasi retta, tracciata diagonalmente fra Moneglia e Rovegno, congiunge i confini sud-occidentali di ciascuna massa; confini da tal parte accennanti a una certa rettilineità, e accompagnati da un'enorme fascia di roccie meccanicamente laminate, frantumate, rimpastate, come lo sono le breccie di Rovegno e di Fontanigorda, gli agglomerati arenacei, le miloniti e le altre breccie di Borzonasca e di Casarza; le quali invero, circuiscono quasi tutta la massa eruttiva, a sua volta frantumata e risaldata da riproduzioni silicee o carbonate; ma si presentano più abbondanti dalla parte sud-occidentale; di modo che, lungo di questa, è probabile la esistenza di una superficie perimetrale di carreggiamento della zona trasportata sulla autoctona [3].

Altro caso affatto differente, di eocene autoctono, si ha in relazione con parte della pianura padana. Questa si è circoscritta, come *area di affondamento*, sin dai primi movimenti di *orogenesi attenuata* e di *epeirogenesi*, verificatisi durante l'oligocene: nell'eocene invece, per quanto ci indicano i lembi affioranti da essa, della Collina di Torino e dei Berici, era un'area di sedimentazione poco profonda, che rimase quasi rigida durante i corrugamenti dell'eocene superiore; onde abbiamo nei Berici, e alla periferia dei retrostanti Lessini, l'eocene autoctono — il quale per eccezione, rispetto alla trasgressione mesonummulitica, comincia con il londiniano o spilecchiano — assai poco piegato, e concordante nelle sue inflessioni con l'oligocene, che si è depositato su di esso senza *hiatus*. Ciò risulta evidente dagli accurati profili pubblicati dal Fabiani [4].

(1) Rend. Accad. Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem. (1917).

(2) Id., ibid., vol. XXV, serie 5ª, 2° sem. (1916).

(3) Per maggiori particolari sulle breccie delle regioni serpentinose eoceniche vedansi i lavori dell'Issel e del Mazzuoli.

(4) Mem. Instit. Geologico della Università di Padova, pubbl. da G. Dal Piaz, vol. III, mem. 1ª (1915).

Una terza maniera di giacimento dell'eocene autoctono in area italiana, è quella illustrata dal Franchi nel lavoro ora citato, e che si riferisce all'eocene superiore, depositatosi attorno al di già determinato massiccio del Mercantour, eocene rimasto in posto e che, come nell'Appennino Ligure, dopo una non larga zona, in questo caso meglio delimitabile, viene ricoperto dall'eocene carreggiato ([1]).

Un quarto modo, e questo sia solo ricordato, data la sua evidenza, per un completamento didattico, è quello che si osserva in Sardegna, dove l'eocene, in unione al mesozoico, copre, con strati orizzontali, il massiccio cristallino e paleozoico, il quale, caso unico nel nostro paese, è troncato da una vera *peneplain*.

Patologia vegetale. — *Ricerche sulla morfologia e biologia della Blepharospora cambivora, parassita del Castagno.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Nell'ultima relazione ([2]) delle mie ricerche sulla *malattia dell' inchiostro* del castagno, riguardo al parassita a cui questa è dovuta, concludevo che trattavasi di un micelio pluricellulare, ma che per un tempo più o meno lungo potevasi conservare unicellulare, a percorso intercellulare e intracellulare, formante nel cambio austori globosi e filamentosi.

Sin ad ora tutte le colture di questo micelio sui più diversi substrati nutritivi solidi, semiliquidi o liquidi erano rimaste sempre sterili.

Se per alcuni caratteri morfologici delle ife e delle colture il microrganismo in questione potevasi riguardare come affine alle *peronosporacee*, l'assenza di qualsiasi organo di produzione lasciava molto dubbiosi circa il suo riferimento sistematico, rendendo d'altra parte molto difficile lo stabilire quale fosse il modo di diffusione del parassita e molte delle condizioni che possono favorire od ostacolare lo sviluppo della malattia. In questi ultimi mesi quindi ho cercato ogni mezzo per provocare la formazione di organi sporigeni. L'abbassamento della temperatura anche a —16° C. ha avuto resultato negativo. Un effetto ottenuto però è degno di menzione, e cioè l'arresto momentaneo dell'accrescimento del fungo anche dopo la cessazione del freddo. Ciò si verifica anche per abbassamenti di temperatura da —8° a —10°. Se le colture sono pure, nessuna conseguenza nociva si osserva nell'ulteriore accrescimento del micelio che anzi vegeta molto più vigorosamente.

Ma se le colture sono state artificialmente inquinate o con batteri o funghi saprofiti previamente isolati dai tessuti infetti dei castagni ammalati,

([1]) Vedansi del Franchi, al luogo citato, gli interessanti profili della tav. IV.

([2]) *Studî sulla malattia del Castagno detta dell' inchiostro.* (Annali del R. Istituto superiore forestale, vol. II, 1916-17).

questi microrganismi prendono il sopravento sul micelio parassita uccidendolo. È in questo modo che con tutta probabilità si verifica in natura l'arresto temporaneo dell'infezione alla base del fusto dopo le invernate molto fredde. L'infezione però che resta attiva nella regione ipogea del fusto, non tarda a diffondersi nuovamente. Come il freddo, così si sono dimostrati inefficaci a promuovere la sporificazione, il calore, gli alcali, gli acidi, il disseccamento lento delle colture.

Sono stati invece ottenuti organi sporigeni trapiantando lembi di strato miceliale, sviluppatosi su carote dopo 1 o 2 mesi di coltura, nella seguente soluzione:

Nitrato di calcio.	gr.	0.40
Solfato di magnesio	"	0,15
Fosfato acido di potassio . . .	"	0,15
Cloruro di potassio	"	0,06
Acqua distillata	"	1000,00

A seconda della temperatura, dopo alcune ore o 1 o 2 giorni, si formano all'estremità dei filamenti dei corpi sferoidali dapprima, in seguito piriformi, ovali o citriformi, papillati, a contenuto granuloso, che si divide più volte dando origine a spore sferiche munite di un prolungamento coniforme. Queste spore immobili si formano per lo più all'oscuro e a bassa temperatura. Alla luce intensa e a temperatura più elevata, esse sono mobili, munite di due lunghi cigli vibratili. Il loro movimento di traslazione dura per molte ore. Fissandosi perdono i cigli, e germinano come le spore ordinarie. Oltre agli zoosporangi, altri simili di forma, sono fecondati da un ramo anteridiale che è prodotto dallo stesso filamento che porta l'oogonio.

Le oospore non si sono ancora formate nelle colture. L'aggiunta di glucosio, saccarosio, maltosio, asparagina impedisce la formazione di sporangi.

Zoosporangi ed oogoni si formano pure in gran numero coltivando il micelio sull'humus di castagneto, sterilizzato al calore e mantenuto molto umido. Questo fatto costituisce un dato molto importante per gli studî sulla diffusione della malattia, essendo evidente la possibilità del trasporto a distanza delle spore per mezzo dell'acqua e l'infiltrazione di queste nel terreno.

In altra Nota saranno dati maggiori dettagli descrittivi, intanto, per i caratteri ora riferiti, il micelio parassita rientra fra le *Saprolegnineae* (Schröter), avvicinandosi alle *Phythiaceae* e alle *Peronosporaceae*. Io chiamo questo rappresentante di un nuovo genere col nome di *Blepharospora cambivora*.

Riproduzione artificiale della malattia. — Le inoculazioni artificiali del micelio in castagni sani sono state eseguite nell'arboreto speri-

mentale dell'Istituto di Firenze, in castagni isolati, e in castagneti prossimi a centri infetti (Mondovì).

Sopra 13 piante di castagno di 5-6 anni, piantate in terra, ed inoculate il 26 maggio di quest'anno, 9 erano morte o morenti dopo circa 2 mesi. Le caratteristiche zone brune del colletto salivano verso la base epigea del fusto e si abbassavano nelle radici più superficiali.

In castagni di 60 anni circa l'infezione, in 6 mesi, si è andata allargando nel cambio per $^1/_5$ circa della intera circonferenza del tronco.

Sino dallo scorso agosto avevo preso accordi col Direttore dell'Osservatorio autonomo di Fitopatologia di Torino, prof. P. Voglino, e col Presidente del Consorzio Agrario di Mondovì, per eseguire l'inoculazione del parassita su piante sane di quei castagneti allo scopo di avere una conferma di quanto avevo già ottenuto in Firenze.

Si deve all'alacrità del prof. Voglino e allo zelo del dottor R. Ricci, assistente presso la Cattedra Ambulante di Agricoltura di Mondovì, se tale tentativo ha avuto un ottimo resultato.

Le inoculazioni del micelio, da me appositamente inviato, furono eseguite alla base del fusto di giovani e robusti polloni di castagni dell'età di 10-15 anni in località non ancora attaccata dalla malattia. (in Contrada Alma di Frabosa Sottana), ma prossima a un centro d'infezione.

Esaminate il 2 ottobre alcune di dette piante, venne accertato tanto da me che dal prof. Voglino e dal dottor Ricci, che l'infezione erasi estesa a quasi metà della circonferenza del fusto, scendendo verso il colletto.

In alcuni casi la necrosi dei tessuti era resa manifesta all'esterno da una depressione e imbrunimento della corteccia.

I caratteri presentati dal cambio e dai tessuti corticali erano i medesimi di quelli che si osservano nei castagni colpiti dal mal dell'inchiostro.

Occorrerà attendere sino all'estate ventura per accertare se l'inoculazione potrà determinare la morte delle piante.

Il resultato ottenuto però, mentre garantisce ormai l'esito finale dell'esperienza, permette, insieme a quanto ho riferito sulla biologia del parassita, di prendere in seria considerazione la ricerca dei mezzi di preservazione dei castagni ancora sani. A tale scopo sono ora diretti gli studî che attualmente sono in corso.

Fisiologia. — *Le oscillazioni giornaliere fisiologiche della pressione osmotica della bile umana confrontate con le oscillazioni fisiologiche giornaliere della temperatura del corpo. Contributo alla conoscenza dei meccanismi di regolazione osmotica.* Nota di Bruno Brunacci, presentata dal Socio Luigi Luciani.

A complemento di ricerche che io eseguii nel 1911 ([1]) su di una paziente della Clinica chirurgica di Siena operata da vario tempo di coledocotomia dal prof. Domenico Biondi, allo scopo di osservare le variazioni che il digiuno o l'alimentazione esclusivamente proteica o grassa o di idrati di carbonio avessero apportate nelle proprietà fisico-chimiche della bile, feci anche alcune esperienze sulle oscillazioni giornaliere fisiologiche della concentrazione molecolare dello stesso liquido, sia durante il digiuno, sia durante un'alimentazione mista, che nei giorni di esperimento fu naturalmente sempre la medesima.

Le medie dei risultati ottenuti nei due giorni di digiuno e nei 5 giorni di dieta mista sono riassunti, per quanto si riferisce alla concentrazione molecolare, nelle due tabelle annesse. Da esse si nota come *le oscillazioni giornaliere fisiologiche della concentrazione molecolare della bile umana durante il digiuno seguono, assai approssimativamente, le oscillazioni giornaliere della temperatura del corpo* quali risultano dagli studî di Benedict e Snell (cfr. figg. 1 e 2).

Tabella I. — Tabella II.

	Bile nel digiuno							Bile nella alimentazione mista						
Ore	18	22	2	6	10	14	18	18	22	2	6	10	14	18
Δ	0°,560	0°.557	0°,540	0°,552	0°,560	0°.552	0°,560	0°,580	0° 576	0°,568	0°,574	0°,566	0°,574	0°,580

Se difatti si rappresentano graficamente i dati concernenti la concentrazione molecolare della bile durante il digiuno ottenuti analizzando col metodo crioscopico le quantità uscite dalla fistola in ogni successivo periodo di 4 ore e si riportano sulla stessa grafica e in coincidenza delle medesime ore i dati analitici della temperatura del corpo quali risultano dalle ricerche di Benedict e Snell ([2]) nell'uomo parimente a digiuno, si constata un'ana-

([1]) Atti della R. Acc. dei Fisiocritici in Siena, nn. 1-2, 1912; e Archiv. ital. de Biol., 58, 367 (1912).

([2]) Benedict e Snell, Pflüger's Archiv., 88-492, 90, 33 (1902), e L. Luciani, *Fisiol. dell'Uomo*, vol. V, 4ª ediz.

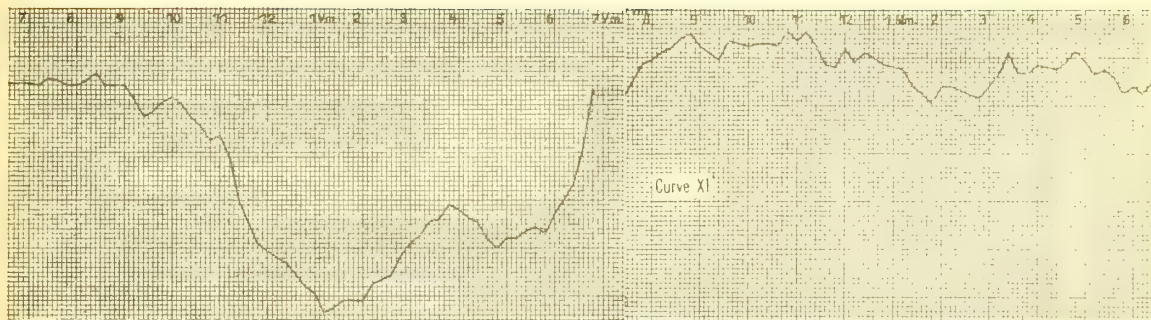



Fig. 1. — Il decorso della temperatura giornaliera dell'uomo a digiuno (Sec. Benedict e Snell).

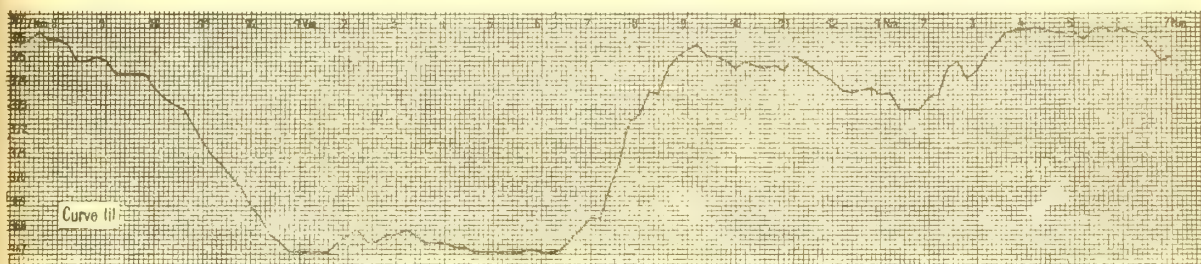



Fig. 2. — Il decorso della temperatura giornaliera dell'uomo durante l'alimentazione mista (Sec. Benedict e Snell).

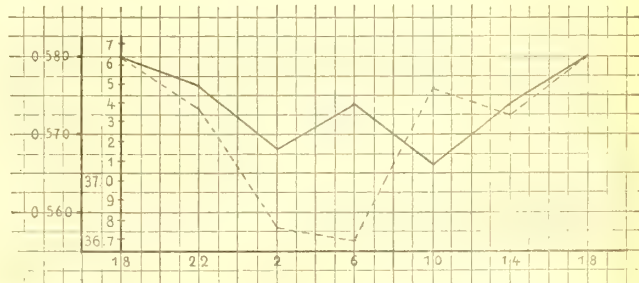
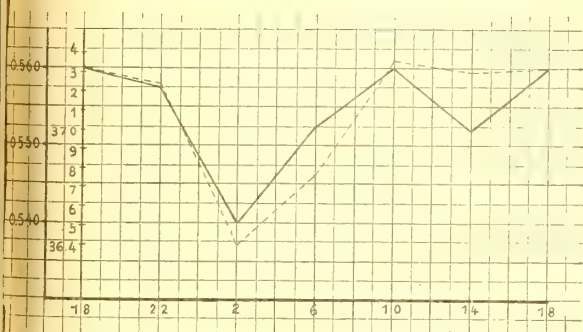



Fig. 3. — Le oscillazioni giornaliere della concentrazione molecolare della bile umana nel digiuno (linea continua) e quelle della temperatura del corpo nel digiuno (linea tratteggiata). (La linea della temperatura è stata desunta dalla fig. 1).

Fig. 4. — Le oscillazioni giornaliere della concentrazione molecolare della bile umana nell'alimentazione mista (linea unita) e quelle della temperatura del corpo nella alimentazione mista (linea a tratti). (La linea della temperatura è dedotta dalla fig 2).

logia così perfetta da far pensare che essa non debba essere soltanto accidentale (fig. 3) (nella fig. 1 la curva di Benedict e Snell è stata fatta principiare dalle ore 19 come le altre curve date dagli stessi AA., loc. cit.).

Tale completa somiglianza non si osserva più, confrontando invece la curva della temperatura durante un'alimentazione mista (non dissimile sostanzialmente da quella del digiuno, figg. 1 e 2), con la grafica delle oscillazioni della pressione osmotica della bile durante una simile alimentazione; sebbene anche in questo caso si riscontri un'evidente diminuzione della pressione osmotica della bile dalle ore 19 alle 2, la quale potrebbe paragonarsi alla diminuzione che in tali ore si verifica pure nella temperatura del corpo (fig. 4). La verosimile spiegazione di questo differente comportamento delle oscillazioni giornaliere fisiologiche della pressione osmotica della bile durante un'alimentazione mista può trovarsi nell'influenza che l'alimentazione stessa esercita su di essa, sebbene in piccola misura, come dalle mie ricerche al riguardo è risultato.

Secondo Montuori, il soprariscaldamento artificiale del corpo di un animale diminuirebbe la concentrazione molecolare del suo sangue. Lo stesso fenomeno si verificherebbe anche se in luogo di riscaldare l'animale gli si trasfonde il sangue di un animale soprariscaldato. Ciò risulta evidente dalla tabella che io traggo dal lavoro del Montuori ([1]).

Variazioni del punto di congelamento del sangue.

	Dopo il riscaldamento diretto				Dopo la trasfusione di sangue di cane riscaldato		
	Prima del riscaldamento	Dopo il riscaldamento	Differenza in meno		Prima della trasfusione	Dopo la trasfusione	Differenza in meno
I . . .	$\Delta = 0^\circ,639$	$0^\circ,563$	$0^\circ,076$	I . . .	$\Delta = 0^\circ,605$	$0^\circ,564$	$0^\circ,031$
II . . .	» 0,550	0,425	0,125	II . . .	» 0,580	0,550	0,030
III . . .	» 0,625	0,540	0,085	III . .	» 0.618	0,570	0,048
IV . . .	» 0,692	0,585	0,107	IV. . .	» 0,572	0,560	0,012
V . . .	» 0.550	0,498	0,052				

A questa diminuzione della concentrazione molecolare del sangue di animali riscaldati coinciderebbe secondo tale A. anche una manifesta sudorazione, la quale si può pure ottenere diminuendo sperimentalmente la concentrazione molecolare del sangue ([2]).

Secondo le ricerche suddette esisterebbe dunque una relazione tra concentrazione molecolare del sangue e riscaldamento sperimentale del corpo di un animale col quale coinciderebbe anche la formazione di speciali sostanze.

([1]) Montuori A., *Ricerche biotermiche.* Napoli, Tip. Giannini (1904), pag. 97 e Archiv. ital. de biol., XLII, 383.

([2]) Arch. di Fisiol., IX, 439 (1911).

Il raffronto dunque che io ho creduto di istituire tra le oscillazioni giornaliere fisiologiche della pressione osmotica della bile umana e le oscillazioni giornaliere della temperatura del corpo non è arbitrario, ma si troverebbe anche in relazione ai risultati ottenuti dal Montuori analizzando il sangue di cani soprariscaldati.

Poichè da tale raffronto risulta un'analogia così evidente tra il decorso giornaliero delle due curve, cioè di quella raffigurante la pressione osmotica della bile durante il digiuno, e di quella che rappresenta la temperatura del corpo, mi è sembrato si potesse logicamente supporre che mentre il sangue durante l'aumento della temperatura corporea diminuisse nella sua concentrazione, le sostanze osmoticamente attive in esso prima contenute si eliminassero attraverso alla bile e probabilmente anche attraverso ad altri liquidi organici, quali la saliva, il succo pancreatico, il gastrico, l'enterico ecc.

Tutte le secrezioni rappresenterebbero quindi vie di eliminazione di quelle sostanze osmoticamente attive che per l'aumentata temperatura non si troverebbero più nel sangue. *Il meccanismo della regolazione osmotica dell'organismo in relazione alle oscillazioni fisiologiche giornaliere della temperatura del corpo manifesterebbe così uno dei suoi fattori anche per mezzo delle secrezioni esterne.*

I risultati che io ottenni analizzando le oscillazioni giornaliere fisiologiche della pressione osmotica della saliva mista umana [1] potrebbero pure trovare una loro più completa spiegazione nella nuova supposta funzione, senza con ciò infirmare affatto le relazioni sicuramente accertate tra le variazioni della concentrazione molecolare dei liquidi digestivi e l'introduzione degli alimenti. Considerata anzi l'influenza che questi esercitano su quelli, e pensando inoltre alla importanza dei fattori psichici sulle secrezioni digestive si comprenderebbe come l'influenza che le lievi modificazioni giornaliere della temperatura del corpo potessero determinare sulla concentrazione molecolare del sangue riescissero ad essere mascherate in gran parte. I risultati perciò ottenuti dall'analisi dei liquidi digerenti dopo l'alimentazione o anche durante il digiuno potrebbero non essere così evidenti come per la bile durante il digiuno. Siccome poi questo liquido non sembra risentire in modo notevole le influenze psichiche, così esso potrebbe durante il digiuno manifestare più evidentemente quelle influenze che le oscillazioni della temperatura del corpo eserciterebbero sulla concentrazione molecolare del sangue. È inoltre noto che tra i varî liquidi dell'organismo la bile è precisamente quello che più somiglia al sangue per la relativa stabilità della sua concentrazione molecolare.

Mi sembra inoltre che si potrebbe del pari parzialmente riportare a questo ordine di idee il risultato che ho ottenuto confrontando la concentrazione

[1] Arch. di Fisiol., VI, 153 (1909).

molecolare della saliva mista umana durante l'estate e durante l'inverno [1]; poichè da quelle ricerche risultò che durante l'estate la saliva mista è più concentrata che d'inverno, come si vede dai seguenti dati:

Estate . . . $\Delta = 0°,176$ (media di 16 determinazioni)
Inverno. . . $\Delta = 0°,150$ (media di 32 determinazioni)

senza certo dimenticare in questo caso l'altro, forse principale, fattore del fenomeno, cioè, la maggior perdita di acqua attraverso alla cute e alle vie respiratorie che si verifica nell'estate.

Mi propongo di proseguire lo studio delle oscillazioni giornaliere della pressione osmotica dei varî liquidi dell'organismo in relazione alle oscillazioni giornaliere della concentrazione molecolare del sangue e a quelle giornaliere della temperatura del corpo, per constatare se alla suddetta ipotesi si possono trovare altre conferme sperimentali.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando le seguenti: *Sul principio del medio aritmetico*, del Corrispondente ANGELITTI; varie Note a stampa di Meccanica pratica, del Corrispondente C. GUIDI. Lo stesso Segretario richiama ancora l'attenzione della Classe sui fascicoli 50° e 51° dei risultati delle *Campagne scientifiche* del PRINCIPE di MONACO; sul tomo 2° delle *Opere* di E. POINCARÉ; sul tomo 12°, 2ª serie, delle *Opere* di A. CAUCHY; sul vol. 31° degli *Atti* della Società italiana di scienze naturali in Pisa; e sul vol. 25° degli *Atti* della Fondazione Cagnola (1915-1916).

Il Socio VOLTERRA, a proposito della presentazione del secondo volume delle opere di Enrico Poincaré, fa noto che il volume stesso contiene la raccolta degli scritti di questo illustre Autore sulla teoria delle funzioni fuchsiane. Esso è venuto alla luce innanzi al volume primo, il quale dovrà riunire i lavori del Poincaré sulle equazioni differenziali; i volumi successivi saranno consacrati alla Meccanica, alla Fisico-Matematica ed alle opere sopra i numerosi altri argomenti a cui il Poincaré ha dedicato la sua meravigliosa attività scientifica.

Lo stesso Socio, ricorda la importanza grandissima che hanno avuto, nello sviluppo dell'analisi moderna, le ricerche del Poincaré relative alle funzioni fuchsiane. Questi studî vennero compiuti dall'Autore in giovane età e furono quelli che per primi rivelarono al mondo scientifico il suo genio, e valsero a fargli acquistare subito un posto d'onore fra i più grandi analisti.

Alla pubblicazione del volume ha contribuito il Darboux ed essa fu condotta con amorosa cura e zelo indefesso dal prof. Lebon in unione col Nerlund che ha aggiunto numerose ed interessanti note.

[1] Arch. di Fisiol., 6 (1909).

Il Socio Reina fa omaggio, in nome della Presidenza della Società italiana pel progresso delle scienze, del volume degli *Atti* relativo al nono Congresso tenuto a Milano e Torino, nell'aprile passato.

COMUNICAZIONI VARIE

L'Accademia dei Lincei, annuncia il Presidente Ròiti, ha l'onore d'ospitare il R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, nelle persone qui presenti del senatore Polacco e dei prof. N. Tamassia e G. Bordiga.

I dolorosi avvenimenti di guerra, per i quali una parte del Veneto venne invaso dal nemico, consigliarono, per prudenza, di trasportare lungi da Venezia la sede dell'Istituto suddetto; e la nostra Accademia è fiera di ospitarlo, e s'augura che ciò sia per breve durata, come è nella speranza e nella fede di tutti gli Italiani.

Il senatore Polacco, a nome dell'Istituto Veneto, ringrazia la Presidenza e la R. Accademia dei Lincei dell'ospitalità larga e cortese che ne ha ricevuto, e s'augura con tutta l'anima che la dimora in Roma abbia ad essere brevissima, e che l'Istituto ritorni nella sua sede naturale.

Il Presidente dà poscia comunicazione dei telegrammi di ringraziamento fatti inviare all'Accademia dalle LL. MM. il Re e la Regina Madre, per gli augurî alle LL. MM. trasmessi in occasione del Loro genetliaco. Lo stesso Presidente aggiunge che, rendendosi interprete dei sentimenti dei Colleghi, inviò anche un telegramma per esprimere il vivo interessamento dell'Accademia alle condizioni di salute dell'illustre ed amato Collega senatore Villari.

Il Presidente Ròiti informa la Classe che in Inghilterra è iniziata e già ben avviata la sottoscrizione, che deve avere carattere internazionale, per la creazione d'una fondazione nel nome del grande fisico-chimico W. Ramsay, le cui scoperte, specialmente sui gas nobili dell'atmosfera, gli diedero fama immortale. Egli esprime il suo parere che gli studiosi italiani abbiano a concorrere, sia pure con mezzi modesti, nella sottoscrizione che per l'Italia è assunta dal nostro Collega il senatore Paternò. Soggiunge che ciò che dà carattere importante ad una sottoscrizione come questa, non sono le somme elevate elargite da pochi, ma il concorso numeroso degli uomini di scienza.

Il Socio senatore Paternò soggiunge che temeva che i tempi attuali non fossero i più adatti per l'esito efficace d'una simile sottoscrizione; ma visto lo sviluppo di già verificatosi in Inghilterra, dove vi concorrono uomini politici, uomini di governo e scienziati numerosissimi, credette di accettare di guidare la sottoscrizione anche per l'Italia, e s'augura che il numero dei sottoscrittori abbia ad essere il più numeroso che sia possibile.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 dicembre 1917.

Bouvier E. L. — Pycnogonides provenant des campagnes scientifiques de S. A. S. le Prince de Monaco (Résultats des campagnes scientifiques, fasc. LI). Monaco, 1917. 4°, pp. 1-56.

Bouvier E. L. — Crustacés décapodes (*Macroures marcheurs*) provenant des campagnes des yachts Hirondelle et Princesse-Alice (Resultats des campagnes scientifiques, fasc. L). Monaco, 1917. 4°, pp. 1-140.

Cauchy Aug. — Oeuvres, vol. XII. Paris, 1916. 4°, pp. 1-472.

Guidi C. — Come possa tutelarsi l'incolumità e l'integrità dei fondi a valle delle alte dighe di sbarramento per la formazione dei laghi artificiali (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », an. 1917). Torino, 1917. 8°, pp. 1-6.

Guidi C. — Sui ponti ad arco in cemento armato (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. 52, pp. 987-995). Torino, 1917. 8°.

Guidi C. — Sull'impiego dell'acciaio nelle costruzioni in luogo del ferro omogeneo (Estr. dal « Giornale del Genio civile »). Torino, 1917, fol.

Longa B. — Ricerche su la poliembrionia (Estr. dagli « Annali di Botanica », vol. XIV, pp. 151-162). Pisa, 1917. 8°.

Malenotti E. — *Casca Luzonica* Malen. n. sp. (Estr. dal « Redia » vol. XIII, pp. 73-76). Firenze, 1917. 8°.

Malenotti E. — I nemici naturali della « Bianca-Rossa » (*Chrysamphalus dictyospermi* Morg.) (Estr. dal « Redia » vol. XIII, pp. 17-51). Firenze, 1917. 8°.

Poincaré H. — Oeuvres, vol. III, par G. Darboux. Paris, 1916. 4°, pp. I-LXXI, 1-632.

Ulivi G. — Alcune considerazioni sulle mie ultime esperienze di Radiobalistica eseguite al Campo sperimentale di Lamazzo nel luglio 1917. Saronno, 1917. 8°, pp. 1-30.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 11°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 5°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 5.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 dicembre 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

COMUNICAZIONI VARIE

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 12.

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 *dicembre* 1917.

Volume XXVI.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 1/2.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 dicembre 1917.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* I: *Generalità e prima approssimazione.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

La questione che è oggetto della presente Nota e di alcune altre che le faranno seguito si imposta fisicamente così:

Una regione dello spazio è sede di un campo di forza — nell'ordinaria meccanica si direbbe senz'altro newtoniano — dovuto all'azione di masse esterne al campo. Supposto che le masse non si spostino e che non intervenga nessun'altra circostanza perturbatrice, si stabilisce — pur valendo la nuova meccanica di Einstein — un regime statico, poco diverso da quello che risponde alla tradizione classica, le condizioni di equilibrio dovendosi desumere dalle equazioni gravitazionali di Einstein. Il nostro scopo è appunto di discutere le principali conseguenze di codeste equazioni nel caso semplice testè specificato.

Dacchè il divario quantitativo dallo schema abituale è appena sensibile alle più affinate esperienze, siamo intuitivamente tratti a presumere che ad ogni ordinario potenziale newtoniano si coordini una soluzione dell'anzidetto sistema differenziale, sicchè il grado di arbitrarietà del suo integrale generale sarà quello stesso delle funzioni armoniche. Ciò si mette in evidenza, direi quasi automaticamente, quando, nella trattazione delle equazioni differenziali, ci si limita ad una prima approssimazione. Il potenziale newtoniano $-c^2\gamma$ (c costante universale ben nota) conserva allora, nei riguardi statici, il suo significato ordinario (vuoi di lavoro, vuoi, cambiando il segno, di energia posizionale di un ipotetico punto materiale mobile nel

campo); e la metrica dello spazio ambiente subisce soltanto una alterazione conforme (rispetto alla metrica euclidea che vige in assenza del campo), di modulo $1 - \gamma$ assai prossimo all'unità, avendosi l'elemento lineare

$$dl = (1 - \gamma)\, dl_0 ,$$

con dl_0 euclideo.

In questa prima Nota, prendo anzitutto occasione dai richiami preliminari [nn. 1 e 2] per una osservazione meccanica di carattere generale; ed è che, nella statica di Einstein, seguitano bensì a sussistere le consuete nozioni elementari di funzione delle forze (entro un campo conservativo) e di energia posizionale (di un punto materiale mobile nel campo), ma sono in generale distinte. Soltanto in prima approssimazione, una è l'opposta dell'altra, a meno di una inessenziale costante additiva, come nella meccanica ordinaria.

Scritte poi [n. 3] le equazioni fondamentali, mi occupo qui esclusivamente della loro integrazione approssimata [nn. 4-8] col risultamento già indicato.

Rimetto alle Note successive lo studio rigoroso del sistema differenziale. Nella prossima comunicazione ricaverò le condizioni di integrabilità illustrandole sotto l'aspetto geometrico.

1. — Richiami concernenti il moto di un punto materiale in campo statico.

Sia S una porzione qualsivoglia dello spazio fisico;

$$dl^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, e V la velocità della luce in un generico punto P di S.

L'ipotesi che la forma quaternaria fondamentale della teoria di Einstein sia esente da termini rettangoli in dt, ossia del tipo

$$ds^2 = V^2\, dt^2 - dl^2 , \tag{2}$$

e che i coefficienti V^2, a_{ik} siano funzioni del posto P (cioè delle coordinate x_1, x_2, x_3), *indipendenti da* t, traduce matematicamente la limitazione a fenomeni di carattere statico.

Il moto di un punto materiale (supponendo al solito che si possa prescindere da ogni sua azione sul campo) è retto dalla equazione variazionale

$$\delta \int ds = 0 .$$

Posto per brevità

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1\,,2\,,3)\,,$$

$$v^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \;, \quad \mathrm{L} = c\left|\sqrt{\mathrm{V}^2 - v^2}\right|,$$

con c costante *a priori* arbitraria, se ne traggono le equivalenti equazioni di Lagrange [1]

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,3)\,.$$

Dacchè L non contiene esplicitamente t, esse ammettono il ben noto integrale

$$(4) \qquad \mathrm{L} - \sum_{1}^{3}{}_{i}\, \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_i}\, \dot{x}_i = \mathrm{E} \qquad (\mathrm{E}\ \text{costante})\,,$$

che esprime il principio di conservazione dell'energia. Infatti la funzione della posizione e della velocità del mobile, che sta nel primo membro e che mantiene valore invariato durante il movimento, può interpretarsi come energia (per unità di massa) del mobile stesso: basta attribuire alla costante c il valore, diciamo canonico, della velocità della luce in assenza di ogni azione perturbatrice, e prender norma dal caso elementare ($\mathrm{V} = c$ e dl euclideo) [2].

Osservazione. — Nella citata mia Nota sulla statica einsteiniana avevo adottato per L la determinazione $\left|\sqrt{\mathrm{V}^2 - v^2}\right|$ (senza l'inessenziale fattore c), con che le dimensioni di L erano quelle di una velocità. Lo stesso avvenendo per il primo membro del corrispondente integrale, questo risultava soltanto proporzionale all'energia unitaria del mobile. Coll'attuale L, il primo membro di (4) rappresenta proprio la detta energia.

2. — Significato meccanico della funzione $-\frac{1}{2}\mathrm{V}^2$.

Se ad un dato istante si annulla la velocità del mobile, cioè ognuna delle $\dot{x}_i$ (caso del moto incipiente a partire dalla quiete), si ha in particolare dalle (3)

$$(5) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{k}\, a_{ik}\, \ddot{x}_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{V}^2}{\partial x_i} \qquad (i = 1\,,2\,,3)\,,$$

[1] Cfr. la Nota *Statica einsteiniana*, in questi Rendiconti, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 465.

[2] Cfr. A. Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein*, Nuovo Cimento, serie VI, vol. XIV, 1917, pag. 40.

le quali definiscono le $\ddot{x}_i$ (i due punti sovrapposti significando, ben s'intende, duplice derivazione rapporto a t) in funzione del posto. I secondi membri

$$X_i = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x_i} \tag{6}$$

(in quanto derivate di una medesima funzione $-\frac{1}{2}V^2$) costituiscono manifestamente un sistema covariante (di fronte a trasformazioni qualsivogliono di coordinate spaziali). Il sistema contravariante reciproco è

$$X^{(i)} = \sum_1^3{}_k\, a^{(ik)} X_k ,$$

designandosi al solito con $a^{(ik)}$ i coefficienti della quadrica reciproca al dl^2.

La risoluzione delle (5) porge precisamente

$$\ddot{x}_i = X^{(i)},$$

mettendo in evidenza il carattere contravariante delle accelerazioni incipienti: voglio dire delle $\ddot{x}_i$ spettanti ad un punto materiale in campo statico, quando si assumono tutte le $\dot{x}_i$ eguali a zero.

Ai due sistemi semplici reciproci X_i, $X^{(i)} = \ddot{x}_i$ si coordina notoriamente ([1]) un unico vettore **F** (dello spazio euclideo tangente, col quale del resto si identifica qualunque varietà nell'intorno di prim'ordine di un suo punto generico).

Tale vettore **F** *porge ovviamente la misura statica della forza* (unitaria) *del campo* (accelerazione incipiente di un punto materiale libero, o, se si vuole, accelerazione che è d'uopo vincere per mantenere il punto in quiete).

Consideriamo, accanto al punto P di coordinate x_i, un punto vicinissimo P′ di coordinate $x_i + dx_i$ e il trinomio (invariante)

$$\sum_1^3{}_i\, X_i\, dx_i = -\tfrac{1}{2}\, dV^2 .$$

Indicando con dl l'elemento lineare PP′, $-\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dl}$ si presenta come derivata (in P) della funzione $-\frac{1}{2}V^2$ secondo l'arco (di una qualsiasi linea) uscente da P verso P′. D'altra parte i rapporti $\frac{dx_i}{dl}$ sono i parametri spet-

([1]) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu*, etc., Math. Ann., B. LIV, 1900, pag. 137.

tanti alla direzione PP′, e la proiezione ortogonale (col debito segno) del vettore **F** secondo tale direzione è espressa dall' invariante

$$\sum_1^3{}_i X_i \frac{dx_i}{dl} = -\tfrac{1}{2} \frac{dV^2}{dl} .$$

Perciò, definendo il lavoro elementare di **F** relativo allo spostamento PP′, come nell'ordinario spazio euclideo. quale prodotto dello spostamento per la proiezione ortogonale della forza, l' identità

$$-\tfrac{1}{2} \frac{dV^2}{dl} dl = -\tfrac{1}{2} dV^2$$

mostra che $-\frac{1}{2} V^2$ *costituisce la funzione potenziale della forza che si esercita nel campo in condizioni statiche.*

Vale la pena di rilevare che, mentre nell'ordinaria meccanica questa funzione potenziale, cambiata di segno, si può anche interpretare come una energia di posizione spettante al punto mobile, ciò in generale non avviene nella teoria di Einstein. Infatti dalla (4), quando la velocità si annulla, si ha la parte intrinseca (cioè costante) e posizionale dell'energia del mobile complessivamente espressa da cV, che non coincide con $\frac{1}{2} V^2$, nemmeno a prescindere da una costante additiva (inessenziale, rispetto alla funzione potenziale $-\frac{1}{2} V^2$). Le due espressioni cV e $\frac{1}{2} V^2$ hanno differenza costante soltanto in prima approssimazione, quando cioè il divario di V dal valore costante c è abbastanza piccolo perchè, ponendo $V = c(1 + \gamma)$, sia lecito risguardare γ come una quantità (numero puro) di prim'ordine. Si ha allora

$$cV = c^2(1 + \gamma) \quad , \quad \tfrac{1}{2} V^2 = \tfrac{1}{2} c^2 (1 + 2\gamma) ,$$

che differiscono per $\frac{1}{2} c^2$.

3. — Campi vuoti – Equazioni indefinite.

Supponiamo che la porzione S di spazio a cui si riferiscono le nostre considerazioni sia completamente vuota, abbia cioè densità di energia (e quindi di materia) ovunque nulla. Supponiamo inoltre che entro S siano ovunque nulli gli sforzi specifici. In tali condizioni si annullano evidentemente, in ogni punto di S, tutti gli elementi del tensore energetico (sforzi, densità e flusso di energia).

Il ds^2 einsteiniano (e con esso il dl^2 spaziale) sarebbe rigorosamente euclideo, qualora il tensore suddetto fosse zero in *tutto* lo spazio [1]. Noi

[1] L'affermazione è intuitiva sotto l'aspetto fisico, rispecchiando, si può dire, il punto di partenza della costruzione speculativa di Einstein. Dal punto di vista matema-

ci proponiamo più generalmente di indagare le limitazioni che derivano dal semplice annullamento *locale* (in una porzione finita S di spazio).

Le equazioni indefinite che vanno all'uopo discusse sono manifestamente quelle della statica einsteiniana, coi secondi membri eguali a zero (per essere nullo il tensore energetico), cioè le sette seguenti [1]:

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = 0 ,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i , k = 1 , 2 , 3).$$

In queste si considera come fondamentale il dl^2 spaziale (anzichè il ds^2 quadridimensionale di Einstein): le α_{ik} sono i simboli di Ricci (che sostituiscono con vantaggio quelli di Riemann per le forme ternarie);

$$\mathfrak{M} = \sum_{1}{}_{ik} a^{(ik)} \alpha_{ik}$$

è la curvatura media dello spazio. Essendo notoriamente

$$\Delta_2 V = \sum_{1\,ik}^{3} a^{(ik)} V_{ik} ,$$

la (I), in virtù delle (II), equivale alla condizione di armonicità

$$\text{(I')} \qquad \Delta_2 V = 0 .$$

4. — Prima approssimazione. Conseguente linearità del sistema differenziale.

Se si suppone che l'espressione (1) del ds^2 sia molto prossima al tipo euclideo riferito a coordinate cartesiane di spazio

$$c^2\, dt^2 - \sum_{1}^{3}{}_i\, dx_i^2 ,$$

giova porre, assieme a

$$\text{(5)} \qquad V = c\,(1 + \gamma) ,$$

$$\text{(6)} \qquad a_{ik} = \varepsilon_{ik} + e_{ik} \qquad (i , k = 1 , 2 , 3),$$

---

tico si richiederebbe invece una dimostrazione rigorosa in base alle equazioni che racchiudono oramai tutta la teoria. Non mi consta che tale dimostrazione sia stata data, e mi permetto di segnalarlo, osservando che il teorema in questione si riduce, nel caso limite della meccanica ordinaria, alla costanza d'ogni funzione armonica regolare in tutto lo spazio.

[1] Pag. 464 della già citata Nota, *Statica einsteiniana*.

col solito significato dei simboli ε_{ik} (0 per $i \neq k$ e 1 per $i = k$). Si ha così

$$(6') \qquad dl^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k = dl_0^2 + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, e_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

dove dl_0^2 è l'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo riferito a coordinate cartesiane.

Le e_{ik} sono puri numeri al pari della γ, e il supposto comportamento qualitativo del ds^2 equivale, in prima approssimazione, a trattare come infinitesime tutte queste sette quantità.

I simboli di Riemann $a_{ij,hk}$ relativi alla forma (6') [e quindi ai coefficienti (6)] si riducono in conformità a [1]

$$a_{ij,hk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 e_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 e_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i \partial x_h}\right) \quad (i, j, h, k = 1, 2, 3).$$

Dacchè, a meno di termini di prim'ordine, le $a^{(jh)}$ conservano i valori euclidei ε_{jh}, ne consegue

$$G_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{ij,hk} = \sum_{1}^{3}{}_{j}\, a_{ij,jk} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{j}\left(\frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

In generale le G_{ik} sono legate alle α_{ik} di Ricci dalle relazioni [(14) della Nota *Statica einsteiniana*, già due volte citata]

$$\alpha_{ik} = G_{ik} + \mathfrak{M}\, a_{ik}.$$

Coll'espressione delle G_{ik} testè ricavata, dato che, nel caso presente, $\mathfrak{M} = 0$ a norma della (I), risulta

$$(7) \qquad \alpha_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{j}\left(\frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

La determinazione delle incognite γ, e_{ik} va desunta dalle (I), (II), o, se si vuole, dalle equivalenti (I'), (II).

Importa rilevare che, a meno di termini d'ordine superiore al primo (nelle γ, e_{ik}), le derivate covarianti V_{ik} di $V = c(1+\gamma)$ rispetto alla forma (6') coincidono colle corrispondenti derivate ordinarie di $c\gamma$. Con ciò

$$\Delta_2 V = c\, \Delta_2^0 \gamma,$$

rappresentando Δ_2^0 l'ordinario parametro differenziale di 2° ordine relativo

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 73; oppure Ricci et Levi-Civita, loc. cit., pag. 142.

al dl_0^2, cioè l'operatore $\sum_1^3 i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Le (I'), (II) possono quindi scriversi

$$\Delta_2^0 \gamma = 0 , \tag{8}$$

$$\alpha_{ik} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{9}$$

dove le α_{ik} sono le combinazioni lineari (differenziali del 2° ordine) (7) delle incognite e_{ik}.

5. — Isolamento del problema statico.

Ricordando dal n. 2 che $-\frac{1}{2}V^2$, o, ciò che è lo stesso, $-\frac{1}{2}(V^2 - c^2) = -c^2 \gamma$ costituisce *il potenziale* (statico) *del campo*, appare dalla (8) che questo (come nella teoria classica dell'attrazione newtoniana all'esterno dell'agente) *è sottoposto alla restrizione di essere funzione armonica, nonchè, ben si intende, regolare nel campo.* Il campo stesso — data la forma della (8) — si comporta, nei riguardi della legge di variazione del potenziale, come se fosse euclideo e riferito a coordinate cartesiane.

Le (9) — lo accerteremo tra un momento — non implicano alcun ulteriore vincolo per la funzione γ; quindi, *inversamente, ogni γ armonica e regolare in* S *dà luogo ad un campo possibile.* Ciò è perfettamente conforme allo schema ordinario, secondo cui il gradiente d'ogni funzione armonica e regolare in un campo può essere (in infiniti modi) realizzato mediante l'attrazione di masse esterne al campo.

6. — Il problema geometrico – Soluzione particolare.

Venendo oramai alle (9), si nota in primo luogo che una soluzione particolare si ha prendendo

$$e_{ik} = -2\varepsilon_{ik}\gamma \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{10}$$

La verificazione è immediata, attesa l'espressione (7) delle α_{ik} e l'armonicità della γ.

Siccome poi le (3) stesse costituiscono un sistema lineare, non omogeneo, nelle e, l'integrale generale si ha senz'altro componendo (per via di somma) la soluzione (10) con la soluzione più generale delle equazioni prive di secondo membro

$$\alpha_{ik} = 0 .$$

Dacchè γ non interviene più, è provata l'affermazione del n. prec. circa l'isolamento del problema statico.

L'integrale generale del sistema $\alpha_{ik}=0$ è ben noto; ma, come si preciserà qui appresso, non ha per noi importanza, corrispondendo soltanto a cambiamenti delle coordinate di riferimento.

7. — Carattere inessenziale dell'arbitrarietà formalmente spettante all'integrale generale.

L'annullarsi delle α_{ik} esprime (rigorosamente, non soltanto nel nostro ordine di approssimazione) la condizione necessaria e sufficiente perchè il corrispondente dl^2 (ternario) sia euclideo, ossia riducibile con acconcia scelta di parametri alla forma $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$. Perciò, dette genericamente x_1, x_2, x_3 le coordinate di riferimento, la maniera più generale di definire un dl^2 euclideo, rispetto a tali coordinate x, si ha manifestamente introducendo una qualunque trasformazione fra le y e le x,

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i=1,2,3),$$

e prendendo per coefficienti a_{ik} quelli che risultano dall'esprimere $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$ mediante i differenziali delle x. Assumendo, come è sempre lecito, le funzioni $y_i(x_1, x_2, x_3)$ sotto la forma

$$x_i + \xi_i(x_1, x_2, x_3),$$

si ha $\left(\text{per materiale introduzione dei corrispondenti differenziali nel trinomio } \sum_1^3{}_i\, dy_i^2\right)$

$$dl^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

con

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}.$$

Per rispecchiare la limitazione al prim'ordine delle differenze $a_{ik}-\varepsilon_{ik}$, colla specificazione ulteriore che sia dello stesso ordine il divario fra il reticolato cartesiano delle y e quello (curvilineo) delle x [1], basta (e occorre)

[1] In difetto di tale specificazione, si esige soltanto che risultino infinitesime le sei quantità (numeriche)

$$e_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k},$$

e ciò può ottenersi, come ha mostrato il prof. Almansi [*L'ordinaria teoria dell'elasticità e la teoria delle deformazioni finite*, in questi Rendiconti, vol. XXVI (2° sem. 1917), pp. 3-8], anche senza che sieno infinitesime le stesse ξ.

poter trattare come infinitesime le funzioni ξ (assieme alle loro derivate). Ne risulta

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right), \tag{11}$$

che costituisce l'espressione formale dell'integrale generale del sistema omogeneo $\alpha_{ik} = 0$ [le α_{ik} dipendendo linearmente dalle e, a norma delle (7)].

Ma non è questa espressione formale che importa ritenere, sibbene la circostanza che il termine (11) [da aggiungere a (10) per avere l'integrale generale del sistema (9) a secondi membri non nulli] si può sempre rendere eguale a zero mediante opportuno cambiamento di coordinate: sostituendo cioè alle x le combinazioni

$$y_i = x_i + \xi_i(x_1, x_2, x_3), \tag{12}$$

con che l'espressione del dl^2 si riduce, per costruzione, a $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$, annullandosi tutte le differenze $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$.

Scelte per variabili le y, si deve naturalmente far subire la trasformazione (12) anche alla soluzione particolare (10). Ma la (12) — dovendosi risguardare le ξ infinitesime al pari di γ — si riduce, nei riguardi della (10), alla materiale sostituzione delle y alle x. Rimane perciò inalterata, anche riferendosi alle y, la espressione (11) della soluzione particolare che sola ci interessa.

Si noti inoltre che rimane egualmente inalterata la forma elementare (somma delle derivate seconde) del parametro $\Delta_2^0 \gamma$.

8. — Forma canonica del ds^2.

Si raccoglie da quanto precede che, *entro un campo vuoto, al potenziale statico* (in prima approssimazione newtoniano) *—$c^2\gamma$ si collega una alterazione metrica dello spazio ambiente. Scelte opportunamente le coordinate di riferimento* (le y del n. prec., che qui indicheremo con x) *γ può ritenersi soluzione* (a priori qualunque, purchè regolare nel campo) *dell'equazione di Laplace*

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_3^2} = 0;$$

ai coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare competono (colla stessa approssimazione) le espressioni $a_{ik} - 2\varepsilon_{ik}\gamma$, con che

$$dl^2 = (1 - 2\gamma)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Come si vede, lo spazio non resta in generale euclideo, nemmeno in prima approssimazione, ma è soltanto (in tale approssimazione) rappresentabile conformemente entro uno spazio euclideo.

In definitiva, il ds^2 globale di Einstein che conviene ad un assegnato campo di forza newtoniano di potenziale $-c^2\gamma$ *è dato da*

$$ds^2 = c^2(1+2\gamma)\,dt^2 - (1-2\gamma)\,dl_0^2 \tag{13}$$

(dl_0 elemento lineare di uno spazio euclideo).

Per il campo di un'unica massa ($-c^2\gamma$ proporzionale all'inversa della distanza dalla massa), l'espressione (13) del ds^2 era già stata esplicitamente segnalata da De Sitter [1]. Il caso di quante si vogliono masse (che corrisponde sostanzialmente ad una arbitraria funzione armonica γ) è poi implicito in una notevole formula di seconda approssimazione stabilita da J. Droste [2]. Con tutto cio mi è parso opportuno, proponendomi una ricerca sistematica sugli spazi vuoti, di far posto anche a questi risultati di prima approssimazione, tanto più che vengono così meglio lumeggiati, e si ottengono nel modo più spontaneo senza sviluppi materiali di calcolo.

Paletnologia. — *Ancora la Grotta preistorica di Equi.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Avendo continuato nel 1917 gli scavi da lungo tempo intrapresi nella Grotta preistorica di Equi nelle Alpi Apuane della quale detti un Resoconto all'Accademia (Rendiconti del luglio 1916) e che illustrai a lungo di recente [3], do un nuovo cenno delle ulteriori scoperte.

A metri 1,30 verticalmente sotto il focolare descritto, e così a m. 5,10 sotto il piano del piazzale della Tecchia si trovò un altro focolare pianeggiante, più limitato, presso la parete sinistra della Grotta, non lontano dall'ingresso, quindi un poco indentro al pendio di pietrisco che la superficie della Grotta stessa aveva dall'esterno verso l'interno. Di questo focolare avevamo trovato appena qualche indizio negli scavi precedenti.

Colà il pietrisco è scarso, anzi scarsissimo e predomina la sabbia gialletta derivante dal lento e regolare sfacimento delle pareti silicifere.

(1) Cfr. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der K. Preuss. Ak. der Wiss.. 1916, pag. 692.

(2) *The field of n moving centres in Einstein's theory of gravitation*, K. Ak. van Wet. te Amsterdam, Proceedings, vol. XIX, 1916, pp. 447-455.

(3) *La grotta preistorica di Equi nelle Alpi Apuane* (Arch. per l'Antropologia e la Etnologia, vol. XLVI, 1916).

Nella sabbia fra i due focolari si erano trovati nel 1916 i resti più completi di Orso, oltre ai soliti Leone, Marmotta, Camoscio, Leopardo, Lupo, Stambecco, Lepre e qualche ossa d'uomo. Poco sotto il focolare più alto avevamo trovato una freccia peduncolata, neolitica, rozzi cocci in alto, ed alquanto più giù un osso lungo di Bove spezzato ed un verosimile fermaglio di femore di Camoscio.

In questo anno vi trovammo pure due falangi di Camoscio vuotate ad arte e bucate, si direbbe a uso fischietto ed un pezzetto di Ematite o Magnetite delle Alpi Apuane se non proprio della Tambura, come altri raccolti più in alto. Rozze freccie e selci non erano rare in tutto lo spazio intermedio. Abbiamo lasciato intatta una buona parte del focolare più basso, come di quello più alto.

Seguitando a scavare fino a metri 3 direttamente sotto il focolare più basso, quindi a m. 8,10 sotto il piazzale esterno trovammo sempre sabbia; perciò il fondo roccioso primitivo sta alquanto più giù che non credessi. In fondo è qualche gran masso caduto, sotto uno dei quali conduceva una antica tana di Marmotta intercettata e chiusa a 75 cm. sotto il focolare dalla sabbia accumulata più alta. Nella sabbia trovammo rare selci rozze e coltellini e qualche freccia a mandorla di tipo Moustieriano, della solita roccia, rarissime ossa umane, rari oggetti isolati ed ossi grandi rotti di Lupo (circa 70 cm. sotto), Orso, Leopardo, Stambecco, Aquila, e qualche osso lungo di Bove e di Camoscio rotto per smidollarlo, non arnesi di osso paragonabili a quelli soprastanti salvo, cosa interessante a m. 1,40 sotto il focolare una evidente freccina d'osso probabilmente di ruminante, con peduncolo, o per lo meno con intacchi laterali per la legatura: altra simile più imperfetta fu trovata quasi al medesimo livello.

Tentativi più rozzi di frecce d'osso consimili appaiono fra i due focolari, ma non più in alto.

Presso a poco al sopra detto livello furono trovati una tibia di grossa Aquila, che forse nidificava nella Grotta e resti frammentizi di Stambecco. Di lì in giù si fa meno raro il pietrisco caduto dall'alto.

Per tutta l'altezza del banco sono qua e là come sempre, rarissime ghiaiette fluviali grandi e piccole, isolate, indizio forse del passaggio di acque torrentizie e pistrelle striate e lisciate da ambedue le parti simulanti l'azione di un ghiacciaio.

La mancanza dei soliti arnesi d'osso, di cocci e di frecce selciose peduncolate Aurignaciane da poco sopra il basso focolare in sù, fa comprendere che questo e gli strati sottostanti appartengono già probabilmente al Paleolitico. Però le freccine d'osso di ruminante danno al deposito un carattere non troppo antico.

Il Neolitico ed Eneolitico antico sovrastante, alto almeno 5 metri, dà un'idea della lunghezza dei tempi non lontanissimi durante i quali la

Grotta fu occupata da uomini e da animali, compreso principalmente l'Orso Speleo.

Dei resti di circa 600 orsi trovati nella grotta fino al 1916, almeno 400 provennero dalla parte superiore al focolare più alto.

La Grotta non seguita affatto parallelamente alla parete esterna della Tecchia, verso Sud; nè comunicava con questa per altre fenditure come avevo supposto, ma seguita diritta scendendo verso N. O. La chiave in ferro medioevale, trovata con frammenti d'altra chiave, assai arrugginiti, lungo la parete Sud, un po' in basso, era penetrata perciò da una fessura esterna presso l'ingresso. Parimente non comunicava a parte con l'esterno della Tecchia il recesso adiacente al focolare più alto, dal quale, nel 1915, avevamo ricavato ossa sciolte e sperse di 3 o 4 individui, apparentemente donne e giovani, messe a caso, con pezzi di coccio, selci, frecce a mandorla, fibbie di conchiglia marina, ossa sciolte di Orso, Leone, Camoscio, Lupo, Arvicole, che avevano rosicchiato anche ossa umane, e molti uccelli. Il recesso è costituito da due cavità separate da una fetta di roccia, chiuse superiormente ed ai lati. Dovrei ritornare perciò alla primiera ipotesi, poi esclusa, che si trattasse cioè di un vero ripostiglio del periodo neolitico a livello del focolare più alto, nel quale venivano collocate alla rinfusa della ossa umane a uso sepolcreto, o per uccisione. Và ricordato che sul focolare alto trovammo una rotula umana bruciata coi cocci e con ossa d'orso pure bruciate.

Come dicevo la Grotta seguita assai verso N. O. e forse è in comunicazione diretta con la sottostante Buca d'Equi alla quale accenna pure la pendenza degli strati. Le pareti, almeno verso l'ingresso, seguitano ad essere lisciate e striate, ed attribuisco questo fatto allo scivolamento delle materie finissime silicee lunghesso le superfici calcaree. In mezzo alla finissima rena sono ancora delle piastrelle di calcare lisciate e striate da ambedue le parti, che a torto si piglierebbero per glaciali.

Scavando l'ultimo termine della Grotta quale era dopo gli scavi del 1916, si entrò in altra Grotta leggermente discendente, altrettanto ampia ed estesa, che, senza terminare, si interna con la stessa direzione nel monte per lunghezza di 18 m., a distanza perciò di m. 41 dalla cresta del piazzale esterno. Lo spazio tra il piano e la volta è alto or più, or meno di 1 metro; sì che nell'ultimo tratto conviene andare carponi, e, a differenza della Grotta primieramente scavata, è tutto occupato da pittoreschi grandi e piccoli stalattiti; l'acqua vi gocciola tuttora. La superficie non è occupata, come nella Grotta precedente, da qualche osso calcinato, bensì da un crostone calcitico che ricopre tutte le abbondanti ossa. Queste sono sparpagliate ed in parte rotte ma perfettamente conservate perchè indurite e compenetrate dal cemento calcareo, compresi molti bacini e cranî di Orso con mandibola ma senza mascelle. I cranî d'Orso sono di tutte le età, compreso qualche cranio giovane con perfetta dentatura da Orso Speleo ma con la fronte assai bassa e sfuggente. Sotto la veste calcitica è la sabbia argillosa anche più fina

di quella della Grotta precedente. Con l'Orso sono resti di Leopardo frequenti, di Marmotta e di ruminanti; non ossa umane ed una sola rozza selce, bensì qualche osso di Bove rotto per lungo con intenzione di estrarne il midollo. Gli scavi però si sono assai poco avanzati in questa seconda Grotta scoperta solo negli ultimi giorni, che fu riempita assai prima ed è perciò più antica dell'altra. La sua esistenza porta a qualche migliaio gli individui di Orso i cui resti rimasero nella Grotta.

La fenditura, la quale quasi certamente va dalla Tecchia alla Buca [1] in fondo alla valle con direzione verticale di circa 140 metri e orizzontale di circa altrettanti, fu dovuta primieramente a rottura degli strati calcarei assai contorti e ben poco all'azione di acque rapidamente scorrenti, che non hanno lasciato tracce sulle pareti. Or più larga, or più stretta, essa deve essere stata strozzata dai riempimenti in qualche punto a mezza strada, forse ad una sessantina di metri, nelle direzioni sia verticale sia orizzontale, perchè ivi è una finestra che guarda la valle, cui si giunge salendo dalla Buca. Da quella strozzatura in su la Grotta fu successivamente riempita come un sacco. La fauna trovata finora è molto uniforme: è quella Neolitica ed in parte del Paleolitico superiore: parmi assai difficile che in fondo al sacco abbia a trovarsi qualche specie animale diversa da quelle trovate finora, quantunque sia in parte sicuro il ritrovamento di esemplari più solidi meglio conservati.

Perciò l'interesse paleontologico per le collezioni dell'Istituto fiorentino non è oramai molto grande: probabilmente abbandonerò lo scavo. Però l'interesse paletnologico è aumentato d'importanza anche per lo scavo della grotta esterna sotto il focolare più basso, essendo cambiato il carattere delle suppellettili e degli strumenti umani, anche litici, i quali accennano al Paleolitico Mousteriano. Sarebbe perciò assai utile continuare gli scavi in un luogo che si presenta così chiaro e regolare per la successione degli strati. Per parte nostra siamo disposti a cedere i diritti che la benevolenza dell'amico ing. Carlo Tonelli ci ha cortesemente riservati ed a collaborare, anche con la Direzione delle antichità e Belle Arti per un singolare monumento dei nostri antichi popoli, il quale assolutamente merita di essere conservato e sottratto ai danni ed alle sicure dispersioni che avverrebbero da parte di chi andasse a frugare a caso oppure con idee preconcette.

[1] Il 1° agosto 1917, ad ore 11 l'acqua della Buca d'Equi, essendo l'aria a 18-19° C. aveva la temperatura di 8,7 a 9,1°, e ritengo sia la temperatura costante. Nelle piene porta una rena di microscopici grani ruzzolati di selce dei calcari locali, di Quarzo, di Diaspro rosso, di idromicascisti del Trias provenienti più da lontano, rena affatto diversa da quella di sfacimento locale della sovrastante Tecchia.

Alla sorgente il Barile in fondo alla valle Fagli, (vedi De Stefani, *I dintorni di Equi*, in Rivista geografica, Firenze, 1916) dopo pioggie di varî giorni innanzi, il 30 luglio, l'acqua non sgorgava, ma correva internamente verso Nord; nè si udivano rumori d'intermittenza. Il 31 luglio era cessata ed usciva a traverso le ghiaie più a valle.

In quel giorno l'acqua minerale dei Bagni, all'incile, aveva 24° C.

Matematica. — *Hamiltoniani e gradienti di hamiltoniani e di gradienti, laplassiani, parametri differenziali.* Nota II di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

Nella precedente Nota dal medesimo titolo, inserita in questi medesimi Rendiconti [1], e che nel seguito indicherò con (H di G., I), mi sono occupato di esaminare la forma ultima che conviene alle funzioni rappresentate in simboli da $\nabla_\Omega(G_\Omega U)$, $G_\Omega(\nabla_\Omega U)$ e $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$; ma della terza con eccezione del caso in cui si abbia $2\varrho \leq n+1$ [notazioni e definizioni restano qui le medesime di quelle adoperate in (H di G., I)] che, come ivi si disse, fu presentato senza tutte le conclusioni di cui è suscettibile. Ora, con la Nota presente mi occupo di colmare una tale lacuna e di trattare della funzione rappresentata dal simbolo $G_\Omega(G_\Omega U)$, l'ultima fra quelle enumerate in (H di G., I).

1. *a*) Riferendoci alla (14) della (H di G., I), cioè alla

$$(1) \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = 2\sum \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i \partial\omega_k} | E_i E_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots, m; i < k)$$

per $2\varrho \leq n+1$, ovvero $\varrho \leq \varrho'$, troviamo che, nella espressione a 2° membro, sono nulli tutti i termini pei quali un E_i ha almeno un vertice della piramide di riferimento P in comune con E_k (il prodotto $E_i E_k$, per la supposizione fatta su ϱ, è progressivo); epperò, se, per ogni E_i, indichiamo con $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_\mu}$ $\mu = \binom{n+1-\varrho}{\varrho}$ i ϱ-*spigoli* della $(n+1-\varrho)$-piramide che risulta dalla P dopo averne tolto il ϱ *spigolo* E_i, avremo che saranno nulli i prodotti $E_i E_k$ per quali è $k \neq i_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, \mu)$ mentre che sarà $E_i E_{i_\nu} = E_{i_\nu} E_i$ per tutti i valori di ν. Perciò, ove fissato il posto che compete alla E_{i_ν} dell'ordinamento $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_\mu}$ nell'ordinamento $E_1, E_2, \dots, E_m$, si tenga ancora conto della condizione $i < k$, si avrà, nel caso in esame, per $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$ l'espressione

$$(2) \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = 2\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i \partial\omega_{i_\nu}} E_i E_{i_\nu}.$$

Questa abbraccia, evidentemente, $\frac{1}{2}m\mu$ termini siccome risulta dalle limitazioni dei due sommatori e dalla condizione $i < k (\equiv i_\nu)$; e tanti effetti-

[1] Fasc. 11°, 2° sem., 1917.

vamente devono essere poichè dalla (1) risultano in numero di $\frac{1}{2} m^2 = = \frac{1}{2}\binom{n+1}{\varrho}^2$ i termini a secondo membro, e vi sono, per ogni *ϱ-spigolo* E_i della piramide P

$$\binom{\varrho}{r}\binom{n+1-\varrho}{\varrho-r} \text{ } \varrho\text{-spigoli che hanno } r \text{ vertici comuni con } E_i$$

$$(r = 1, 2, \dots, \varrho);$$

per cui, essendo, in P, m il numero degli E_i vi saranno, nel 2° membro della (1), metà del numero $m^2 - m \sum_{r=1}^{r=\varrho} \binom{\varrho}{r}\binom{n+1-\varrho}{\varrho-r}$ dei termini che non sono nulli. Ma è noto essere

$$\binom{n+1}{\varrho} = \sum_{r=0}^{r=\varrho} \binom{\varrho}{r}\binom{n+1-\varrho}{\varrho-r},$$

dunque i termini che non sono nulli sono metà del numero

$$m^2 - m\left\{\binom{n+1}{\varrho} - \binom{n+1-\varrho}{\varrho}\right\} = m^2 - m(m-\mu) = m\mu .$$

Nel caso in cui si avesse proprio $2\varrho = n+1$, si avrebbe

$$\mu = 1 \ , \ E_i E_{i_1} = (-1)^{\xi_i},$$

dove ξ_i rappresenta il numero delle inversioni che gli indici dei vertici componenti il ϱ-spigolo E_i della piramide P fanno con gli indici di quelli che compongono il ϱ-spigolo E_{i_1} della stessa piramide. Ne segue, che, in tal caso, la formula (2) diventa

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i \partial\omega_{i_1}}, \tag{3}$$

dove la sparizione del fattore 2 rimane giustificata dall'estensione del $\sum$.

Come rilevasi dal 2° membro della (3), il $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$ è, nel caso in esame, una *funzione scalare*, e precisamente, per essere $\nabla_\Omega U$ di specie eguale alla Ω, è la *divergenza*, rispetto ad Ω, *dell'hamiltoniano della* U, rispetto alla Ω, però *supposta questa ordinata* non come la primitiva, ma, *in modo* che all'ordine $1, 2, \dots, m$ corrisponda l'ordine $1_1, 2_1, \dots, m_1$.

b) Alla formola (2) può essere data una forma più espressiva, introducendo l'hamiltoniano

$$\nabla_{\Omega_{r,\mu}} U = (-1)^{\varrho\varrho'}\left(\frac{\partial U}{\partial\omega_{r_1}} \mid E_{r_1} + \cdots\right) = \sum_{j=1}^{j=\mu} \frac{\partial U}{\partial\omega_{r_j}} \mid E_{r_j} \quad (r = 1, 2, \dots, \mu),$$

rispetto alla formazione $\Omega_{r,\mu} = \omega_{r_1} E_1 + \omega_{r_2} E_2 + \cdots + \omega_{r_\mu} E_\mu$ *contenuta*, evidentemente, nella Ω; poichè allora si ha, al posto della (2), la seguente

$$(2') \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial \nabla_{\Omega_{\nu,\mu}} U}{\partial \omega_r} \mid E_r ;$$

e da questa si arriva di nuovo, nel caso $2\varrho = n + 1$, per essere $\mu = 1$, alla (3) che fornisce la $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$ sotto forma di divergenza nel modo indicato.

2. *Caso del* $G_\Omega(G_\Omega U)$. — *a*) Se $2\varrho \leq n + 1$, tenuto conto che $(-1)^{\varrho^2} = (-1)^\varrho$ e che $E_i E_k = (-1)^\varrho E_k E_i$, si avrà successivamente:

$$G_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^\varrho \left\{ G_\Omega \frac{\partial U}{\partial \omega_1} E_1 + G_\Omega \frac{\partial U}{\partial \omega_2} E_2 + \cdots + G_\Omega \frac{\partial U}{\partial \omega_m} E_m \right\}$$

$$G_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^\varrho \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_k} (E_i E_k + E_k E_i) =$$

$$= (-1)^\varrho [1 + (-1)^\varrho] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_k} E_i E_k ;$$

d'onde

$$(4) \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = [1 + (-1)^\varrho] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_k} E_i E_k$$

per tutti i valori di i, k da 1 ad m, e con $i < k$.

In modo analogo, se $2\varrho \geq n + 1$, essendo $(-1)^{\varrho'^2} = (-1)^{\varrho'}$, $E_i E_k = (-1)^{\varrho'} E_k E_i$ (il prodotto $E_i E_k$ è ora regressivo), si avrà l'analoga della (4):

$$(4') \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = [1 + (-1)^{\varrho'}] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_k} E_i E_k$$

con l'analoga estensione pel $\sum$, e con la differenza che nella (4) i prodotti $E_i E_k$ sono progressivi. Dalla (4) segue che, *se* ϱ *è dispari e non supera* $\frac{n+1}{2}$ *il* $G_\Omega(G_\Omega U)$ *è identicamente nullo*; e della (4') segue che *altrettanto avviene ove* ϱ *superi* $\frac{n+1}{2}$ *e sia di parità diversa con* $n + 1$. Sicchè, in linguaggio ordinario, possiamo dire: *In uno spazio ad un numero qualsiasi n di dimensioni, il gradiente del gradiente di una funzione scalare U è identicamente nullo nei due casi seguenti*: 1°) *Se l'ordine* ϱ *della formazione rispetto alla quale si opera è dispari e non supera la metà di quel numero di dimensioni aumentato di* 1; 2°) *Se* ϱ, *superando questa metà, ha la medesima parità di tal numero di dimensioni.*

Nei casi eccettuati dal precedente teorema alle (4), (4') si può dare la forma unica

$$(5) \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = 2 \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_k} E_i E_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m ; i < k).$$

Il caso maggiormente interessante al presente, essendo quello di ϱ pari ed $n+1 \geq 2\varrho$, possiamo notare che $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_\mu}$ avendo il significato dato nel n. 1, alla (5) può sostituirvi l'altra

$$(5') \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = 2 \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{r=1}^{r=\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_{i_\nu}} E_i E_{i_\nu};$$

che è, come dovevasi aspettare, la supplementare della (2), tenendo conto della parità di ϱ. Così, quando sia proprio $n+1 = 2\varrho$ (con ϱ pari, ripetiamo, si ha

$$(6) \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_{i_1}}$$

con ξ_i avente lo stesso significato che in (3); per cui segue essere il $G_\Omega(G_\Omega U)$ eguale al $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$. Con l'intervento della formazione $\Omega_{r,\mu}$ di cui al n. 1, *b*) e di un $G_{\Omega r,\mu}$ analogo al $\nabla_{\Omega r,\mu}$ ivi considerato, può essere dato al $G_\Omega(G_\Omega U)$ una forma analoga alla (2') data pel $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$; cioè la

$$(4') \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial G_{\Omega r,\mu} U}{\partial \omega_r} E_r.$$

b) Se si considera, a fianco della formazione $\Omega = \sum \omega_i E_i$, la formazione istessa scritta nella forma

$$(7) \qquad \Omega_1 = \omega_{1_1} E_{1_1} + \omega_{2_1} E_{2_1} + \cdots + \omega_{m_1} E_{m_1}$$

che si dirà l'*opposta* della precedente, si troverà che il gradiente e l'hamiltoniano di U rispetto alla Ω_1 sono rispettivamente

$$(8) \quad \cdots \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial U}{\partial \omega_{i_1}} | E_{i_1} \qquad (9) \quad \cdots \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial U}{\partial \omega_{i_1}} | E_{i_1},$$

perchè: $\varrho = \varrho' =$ numero pari, $(-1)^{\varrho\varrho'} = +1$, $(-1)^{\xi_i} E_{i_1} = | E_i$, $\| E_i = E_i$.

Prendendo ora la divergenza della (8) rispetto alla $|\Omega = \sum_{i=1}^{i=m} \omega_i | E_i$, si trova la (6) che si trova pure prendendo quella della (9). Se, invece, le due divergenze vengono prese rispetto alla (7) si trova pure un'espressione unica, ma diversa dalla precedente, cioè la

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \omega_{1_1}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_{2_1}} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_{m_1}} = L_{\Omega_1} U.$$

Così abbiamo, in entrambi i casi,

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = G_\Omega(G_\Omega U) = D_\Omega \nabla_\Omega U = D_{|\Omega} G_\Omega U;$$

ma, nel 1° di tali casi, il valore comune di queste funzioni è

$$\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{\xi_i}\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i\,\partial\omega_{i_1}},$$

mentre che, nel 2°, il valore comune è $L_{\Omega_1}U$.

Il 1° valore è possibile soltanto negli spazii ad un numero dispari di dimensioni della forma $4k-1$; così *ha luogo nel nostro spazio*, e riesce istruttivo farne qui il calcolo esplicito.

Per $n=3$, deve essere $\varrho=2$, e si avrà allora $m=6$. Supponendo che $E_1,\ldots,E_6$ siano scelte in modo da aversi

$$E_1=e_1e_2\ ,\ E_2=e_1e_3\ ,\ E_3=e_2e_3\ ,\ E_4=e_1e_4\ ,\ E_5=e_2e_4\ ,\ E_6=e_3e_4\ ,$$

si avrà:

$$E_{1_1}=e_3e_4=E_6\ ,\ E_{2_1}=e_2e_4=E_5\ ,\ E_{3_1}=e_1e_4=E_4$$

$$E_{4_1}=e_2e_3=E_3\ ,\ E_{5_1}=e_1e_3=E_2\ ,\ E_{6_1}=e_1e_2=E_1$$

$$\xi_1=0\ ,\ \xi_2=1\ ,\ \xi_3=2\ ,\ \xi_4=2\ ,\ \xi_5=3\ ,\ \xi_6=4\quad \text{ed}$$

$$\omega_{1_1}=\omega_6\ ,\ \omega_{2_1}=\omega_5\ ,\ \omega_{3_1}=\omega_4\ ,\ \omega_{4_1}=\omega_3\ ,\ \omega_{5_1}=\omega_2\ ,\ \omega_{6_1}=\omega_1\,.$$

Ne segue applicando la (3), o la (6), che quale funzione a 2° membro si presenta la

$$(-1)^0\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_1\partial\omega_6}+(-1)^1\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_2\partial\omega_5}+(-1)^2\frac{\partial^3 U}{\partial\omega_3\partial\omega_4}+$$

$$+(-1)^2\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_4\partial\omega_3}+(-1)^3\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_5\partial\omega_2}+(-1)^4\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_6\partial\omega_1}\,;$$

per cui, raccogliendo i termini simili, si ottiene

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)=G_\Omega(G_\Omega U)=2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_1\partial\omega_6}-\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_2\partial\omega_5}+\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_3\partial\omega_4}\right).$$

È a rilevarsi che, ove $e_1,\ldots,e_4$ siano *vettori indipendenti* di uno *spazio vettoriale misto* a 4 dimensioni, questa formula regge ugualmente.

Fisica matematica. — *Omogeneità delle equazioni e Similitudine nella Fisica.* Nota III di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Applicazione delle considerazioni precedenti alle teorie fisiche.

1. Nelle due Note precedenti, discutendo le Nozioni e i Principî della Similitudine abbiamo veduto come essi siano applicabili alla fisica: *a*) nel caso senz'altro evidente in cui siano dimensionalmente note tutte le entità, variabili o costanti, che possono intervenire nelle relazioni considerate o cercate; *b*) nel caso in cui, pur ammettendo la possibilità dell'intervento, in tali relazioni, di eventuali costanti universali di dimensioni ancora ignote, fosse però sempre possibile di dare *a priori* certe condizioni atte a vincolarne in qualche modo le dimensioni.

In quest'ultimo caso fu anche accennato alle diverse possibili forme di applicazione dei principî, le quali erano caratterizzate dall'ammettere: α) che le dimensioni delle eventuali costanti universali di una data teoria potessero tutte essere espresse mediante alcune determinate costanti fondamentali, di dimensioni fra di loro indipendenti; nel qual caso l'applicazione dei due principî si riduceva alla ricerca delle relazioni possibili fra certe date entità fisiche e quelle costanti fondamentali; oppure: β) che le eventuali costanti universali di una data teoria dovessero avere necessariamente le loro dimensioni sottoposte ad un determinato vincolo; nel qual caso l'applicazione dei due principî si riduceva alla ricerca delle relazioni possibili fra certe entità fisiche ed eventuali costanti soddisfacenti al vincolo dato; oppure finalmente: γ) che la forma di similitudine conveniente ad una data teoria fisica non potesse in generale essere a rapporti arbitrariamente indipendenti per ciascuna delle diverse entità fondamentali, ma dovesse invece avere tali rapporti sottoposti ad un determinato vincolo; nel qual caso l'applicazione del principio di similitudine si riduceva alla ricerca delle possibili relazioni fra date entità fisiche, che rimanessero invariate per tutte le trasformazioni ammesse da quella speciale forma di similitudine.

Ricordando una mia ricerca ancora in corso di pubblicazione, ho infine accennato come in ogni teoria fisica siano sempre verificate le condizioni supposte in α e β, vale a dire come sia sempre possibile assegnare dei vincoli, ai quali debbano essere sottoposte le dimensioni delle costanti universali di quella teoria, ed anche trovare costanti fondamentali indipendenti, mediante le quali tali dimensioni possano venire espresse. Ammesso ciò, la

terza forma γ è evidentemente in stretta relazione colle due precedenti, quando le costanti che lasciano invariate le trasformazioni ammesse da quella speciale forma di similitudine, siano appunto le costanti fondamentali del caso α o le equivalenti costanti generiche del caso β.

Vediamo ora con qualche esempio le questioni che si presentano nelle applicazioni dei diversi casi e le loro interpretazioni fisiche.

2. Le applicazioni nel caso *a*) non dovrebbero sollevare alcuna difficoltà essendo esse perfettamente analoghe a quelle note della dinamica. Ma la solita incertezza nella trattazione delle questioni che si riferiscono alle dimensioni fisiche ha qui pure influito, così che sono avvenute talora curiose discussioni, che non hanno certo contribuito a condurre ad una esatta valutazione dell'indole e della portata del principio della Similitudine. Per es. Lord Rayleigh, nell'interessante pubblicazione già ricordata, trattò con questi metodi il problema di Boussinesq del passaggio stazionario h del calore da un buon conduttore di lunghezza a ad un liquido moventesi colla velocità v, per una differenza di temperatura ϑ fra corpo e liquido, giungendo alla formula $h = k a \vartheta \mathrm{F}(a v c k^{-1})$ nella quale c rappresenta il calore specifico del liquido, k la conducibilità termica di esso e F una funzione arbitraria che in casi speciali poteva poi venire determinata.

Immediatamente veniva fatta dal sig. D. Riabouchinsky l'osservazione che, se invece delle quattro entità fondamentali (lunghezza, tempo, temperatura e quantità di calore) considerate dal Rayleigh si fosse definito il calore come energia cinetica delle molecole, si sarebbe invece trovata la formula $h = k a \vartheta \mathrm{F}(v k^{-1} a^{-2} c a^{3})$. A questa osservazione fu risposto da varie parti e brevissimamente anche dallo stesso Lord Rayleigh, ma, a parer mio, non in modo completamente esauriente.

Senza entrare nei particolari della deduzione dell'ultima formula, che qui non interessano, osserviamo solamente che, in seguito alla definizione del calore come energia cinetica delle molecole, il problema precedente (che in fondo consisteva nella ricerca delle relazioni dimensionali possibili fra le entità fisiche *quantità di calore*, *lunghezza*, *tempo*, *temperatura*, *conducibilità*, *calore specifico* e *velocità*) avrebbe dovuto essere meglio definito. Si sarebbe allora veduto che, se ci si proponeva di trattare la questione *microscopicamente* e quindi si consideravano nell'entità velocità tutte le velocità, ivi comprese quelle delle singole molecole, il problema sarebbe divenuto infinitamente complesso; se ci si proponeva invece di trattare la questione *macroscopicamente*, considerando cioè i soli valori medî delle velocità delle molecole, si sarebbe allora dovuto, prima di tutto, introdurre, al posto delle classiche, le nuove entità statistiche, colle rispettive dimensioni; ma in tal caso avremmo certamente ritrovata la formula del Rayleigh.

3. Passiamo ora ad applicazioni in cui possano intervenire costanti universali e trattiamo uno stesso esempio nelle forme α, β e γ del n. 1, onde vederne chiaramente le analogie e le differenze.

Assumiamo ancora il sistema di dimensioni l, t, m, T e proponiamoci di prevedere la relazione di regime fra la densità u dell'energia irraggiata da un corpo nero e la temperatura T dell'ambiente.

α) Se ammettiamo che le dimensioni delle eventuali costanti universali, che possono intervenire nella relazione cercata, debbano essere tutte esprimibili mediante le tre costanti universali ordinariamente usate, velocità della luce c, costante dell'entropia k e costante di Planck h, dalle dimensioni risp. $[l t^{-1}]$, $[l^2 t^{-2} m T^{-1}]$ e $[l^2 t^{-1} m]$, il problema si ridurrà alla ricerca delle relazioni logicamente possibili della forma: $u = f(T, c, k . h)$.

Possiamo usare indifferentemente il metodo delle dimensioni o quello della similitudine (Nota II, 2) ponendo, nel primo caso, l'equazione dimensionale $[l^{-1} t^{-2} m] = [T]^{\alpha_1} [l t^{-1}]^{\alpha_2} [l^2 t^{-2} m T^{-1}]^{\alpha_3} [l^2 t^{-1} m]^{\alpha_4}$, o, nel secondo caso, servendoci delle formule di trasformazione (3) della Nota I, l'equazione funzionale $f(T, c, k, h) = \lambda \tau^2 \mu^{-1} f(\vartheta T, \lambda \tau^{-1} c, \lambda^2 \tau^{-2} \mu \vartheta^{-1} k, \lambda^2 \tau^{-1} \mu h)$.

In entrambi i casi giungeremo all'unica relazione $u = [c^{-3} k^4 h^{-3}] T^4$, che è la nota legge di Stefan-Boltzmann colla costante universale espressa in funzione delle c, k ed h assunte come fondamentali.

β) Se invece ammettiamo che le λ, τ, μ e ϑ delle dimensioni delle varie costanti della teoria non possano essere completamente arbitrarie, ma debbano soddisfare all'equazione $\lambda + \tau - \mu = \vartheta$, e quindi che una costante generica di quella teoria debba avere le dimensioni $[l^\lambda t^\tau m^\mu T^{\lambda+\tau-\mu}]$, il nostro problema si ridurrà alla ricerca delle possibili relazioni della forma $u = f(T, [l^\lambda t^\tau m^\mu T^{\lambda+\tau-\mu}])$. Qui pure, tanto col metodo delle dimensioni, quanto con quello della similitudine, giungeremo all' unica determinazione $u = [l^{-1} t^{-2} m T^{-4}] T^4$, che è appunto la precedente legge di Stefan Boltzmann, colla costante universale espressa direttamente in funzione delle entità fondamentali l, t, m e T.

γ) Ricorriamo finalmente alla particolare forma di similitudine la quale, per tutte le trasformazioni che può ammettere, lascia invariate le c, k ed h del caso α o la generica costante vincolata del caso β. Le sue formule di trasformazione, come è facile verificare, formeranno un sottogruppo deducibile dal gruppo generale delle (3) della Nota I, quando si faccia $\lambda = x$, $\tau = x$, $\mu = x^{-1}$, $\vartheta = x^{-1}$. Non sarà allora più necessario considerare esplicitamente le dimensioni delle eventuali costanti universali, ma basterà cercare le relazioni della forma $u = f(T)$ che rimangono invariate per quelle trasformazioni. Verremo così a porre la equazione funzionale $f(T) = x^4 f(x^{-1} T)$, la quale è evidentemente soddisfatta solamente dall'ammissione $u = \text{Cost.}\, T^4$ che è appunto la legge di Stefan Boltzmann nella sua forma consueta.

4. A formule di trasformazione corrispondenti a quelle generali, quando si faccia $\lambda = x$, $\tau = x$, $\mu = x^{-1}$, $\vartheta = x^{-1}$, $\eta = x^0 = 1$, e che quindi lasciano invariata, oltre le c, k ed h, anche la costante dielettrica ε e in

generale ogni costante dalle dimensioni $[l^\lambda t^\tau m^\mu T^{\lambda+\tau-\mu}]$ e $[l^\lambda t^\tau m^{\lambda+\tau} e^{-2\lambda-2\tau}]$, il Tolman era giunto fin dal 1914 fondandosi su considerazioni di tutt'altra indole. E appunto per tali considerazioni e per il significato eminentemente fisico che il Tolman credette di poter dare al suo principio, furono sollevate molte obbiezioni, delle quali le più fondate furono quelle deî sigg. E. Buckingham e J. Jshiwara.

Il primo sostenne che il principio del Tolman non era che un caso particolare del principio più generale dell'omogeneità, ma non riuscì a rispondere all'obbiezione del Tolman, che rilevava l'impotenza di tale principio a risolvere questioni fisiche nelle quali possono intervenire costanti universali, per es. a dedurre la procedente relazione $u = \text{Cost}\, T^4$.

L'Jshiwara spinse più innanzi la propria critica e mostrò come si potesse giungere ai risultati del Tolman introducendo sempre nelle formule ordinarie del principio dell'omogeneità la considerazione delle costanti c, k, h ed ε, senza però mostrare *se, perchè e in quali limiti* la considerazione di quelle quattro costanti dovesse bastare in tutti i casi.

Le nostre considerazioni rispondono esaurientemente a tutte queste difficoltà. Il principio dell'omogeneità nella sua forma generale non è applicabile alle teorie fisiche quando è possibile l'intervento di costanti universali di dimensioni ignote. È invece perfettamente applicabile a determinate teorie, quando in esso si introduca la considerazione delle sue possibili costanti universali. Tale considerazione, sia pure implicitamente, aveva introdotto il Tolman colla limitazione delle trasformazioni ammissibili a quelle sole che lasciano invariate le dimensioni delle c, k, h ed ε, e quindi dei loro prodotti, giungendo così ad una speciale forma di similitudine valevole in tutto il campo in cui sussiste la condizione che le eventuali costanti universali debbano essere tutte esprimibili per mezzo delle c, k, h ed ε, vale a dire in tutto il campo dell'interpretazione fisica fondata sulla termodinamica e sulla teoria di Maxwell. Da questo punto di vista, quindi, le formule del Tolman possono essere utilissime.

Il fatto invece della possibilità di concepire infiniti universi fisici simili al nostro non può essere considerato come un nuovo principio atto a determinare una speciale interpretazione dell'universo fisico, perchè esso è comune a tutte le interpretazioni fisiche, quando solamente siano in accordo col principio generale dell'omogeneità.

Interpretazione fisica delle diverse forme di Similitudine.

5. Vediamo ora di interpretare le diverse forme di similitudine che abbiamo incontrate mediante la considerazione fisica degli universi che, secondo esse, possiamo immaginare dedotti dal nostro.

Alla forma più generale, coi varî rapporti principali completamente indipendenti, corrisponde una molteplice infinità di universi simili al nostro, ai quali si può giungere variando, secondo rapporti arbitrarî, le entità fondamentali, tanto delle diverse entità fisiche variabili, quanto delle costanti. In tali universi l'etere sarà quindi in generale differente dal nostro.

Però in cotesti universi simili, che le mie citate ricerche sulle costanti universali mostrano essere sempre concepibili, sussistono senz'altro tutte le leggi della nostra meccanica e anche quelle della nostra fisica, purchè si esprimano esplicitamente e si trasformino convenientemente tutte le costanti universali che in esse figurano.

Il fisico che sperimentasse in ciascuno di cotesti universi, colle stesse norme come nel nostro, troverebbe le nostre leggi; ma il fisico che dal nostro universo ne osservasse uno qualsiasi, riscontrerebbe bensì che in esso le leggi hanno le stesse forme di quelle del nostro; ma dalla differenza dei valori delle costanti rileverebbe la differenza dei due eteri.

Alla forma meno generale, coi rapporti vincolati, corrispondono infiniti universi simili al nostro, ma sottoposti alla condizione che in essi debbono rimanere invariate certe espressioni dimensionali. Quando queste sono le costanti universali di qualche teoria, come nel caso del paragrafo precedente, cotesti universi simili dovranno avere un etere assolutamente eguale al nostro o, in altri termini, essere universi, quali potrebbero concepirsi realizzati nel nostro etere.

Il fisico che sperimentasse in essi troverebbe naturalmente le nostre stesse leggi, e il fisico che li studiasse dal nostro universo riscontrerebbe non solo l'identità della forma delle leggi, ma anche quella dei due eteri. Gli universi *in miniatura* considerati dal Tolman sono appunto di questo genere.

Meccanica. — *Sopra il movimento di rotazione diurna della Terra.* Nota I di A. Antoniazzi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il movimento diurno della Terra, considerata come corpo rigido avente forma di ellissoide di rotazione, è ormai stato studiato con la profondità e la estensione necessarie per l'uso astronomico, il quale richiede la migliore conoscenza del movimento dell'asse terrestre nello spazio e quindi la rappresentazione in numeri della Precessione degli equinozi e della Nutazione. Ma questo risultato si consegue con lungo procedimento analitico e complicati sviluppi in serie, attraverso i quali è difficile seguire il significato meccanico del problema, la cui soluzione non può dirsi completa, perchè non dimostra il legame esistente fra i due movimenti dell'asse ter-

restre, quello nello spazio, sopra accennato, e quello nell'interno della massa terrestre, che dà origine alle Variazioni delle latitudini. È noto dalla Cinematica che l'asse istantaneo di rotazione di un corpo rigido non può variare la propria direzione nello spazio se contemporaneamente esso non si sposta nell'interno del corpo, così che, nel caso attuale, non potrebbe esistere il movimento di Precessione e Nutazione dell'asse terrestre ove non esistesse in pari tempo il movimento che dà origine alle Variazioni delle latitudini. E si può intuire che un tale risultato debba anche estendersi nel senso che, se l'un movimento si compone di più movimenti periodici, anche l'altro sarà composto da più movimenti che dipendono dagli stessi periodi del primo, quantunque, nella composizione dei due movimenti, i varî periodi possano influire in maniera affatto diversa. Questi fatti risultano da una trattazione diretta del problema, che può farsi dopo aver attribuito forma alquanto più agile della consueta alle equazioni cardinali del movimento di rotazione di un corpo rigido intorno ad un punto fisso, o coincidente col baricentro del corpo [1].

Come è noto, le equazioni ora accennate esprimono che: *Le derivate rapporto al tempo dei momenti delle quantità di moto rispetto a tre assi ortogonali passanti per il centro di rotazione ed aventi direzione fissa, sono rispettivamente eguali ai momenti risultanti delle forze rispetto ai tre assi.* Sotto forma vettoriale, le tre equazioni si riassumono nell'unica

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \Gamma \tag{1}$$

cioè: *La derivata, fatta con riferimento ad assi di direzione invariabile, del momento* **K** *delle quantità di moto rispetto al centro di rotazione, è eguale al momento risultante* $\boldsymbol{\Gamma}$ *delle forze esterne.*

Questa equazione semplicissima è poco utile in pratica, poichè il moto del corpo fa variare il momento **K** delle quantità di moto, non solo per effetto della variazione di velocità, ma ancora per il diverso orientamento che il corpo prende rispetto agli assi, alterandosi così (rispetto a questi) la distribuzione della materia, e con essa (in generale) i momenti e i prodotti di inerzia. Per tale motivo, in luogo della equazione precedente, si suole adottare quella che vale per assi mobili insieme con il corpo e che riassume le tre equazioni di Eulero, purchè i tre assi di riferimento siano gli assi principali d'inerzia del corpo. Tale equazione si deduce dalla (1) tenendo conto della relazione che esiste fra la derivata $\frac{d}{dt}$ di un vettore

[1] Pervenni ad un tale risultato studiando le Lezioni di Meccanica razionale del collega prof. Levi-Civita, allo scopo di preparare le mie lezioni sulla Precessione e Nutazione.

fatta con riferimento ad assi di direzione invariabile e la derivata $\frac{d'}{dt}$ fatta con riferimento ad assi che ruotano con velocità angolare ω rispetto ai primi. Poichè la prima derivata rappresenta una velocità assoluta, la seconda una velocità relativa, la differenza sarà una velocità di trascinamento

$$\frac{d\mathrm{K}}{dt} = \frac{d'\mathrm{K}}{dt} + \omega \wedge \mathrm{K}\,.$$

Si noti che questa formula può essere combinata con la (1) senza alcuna restrizione intorno al valore di ω, così che la equazione

$$\frac{d'\mathbf{K}}{dt} + \omega \wedge \mathrm{K} = \boldsymbol{\Gamma} \tag{2}$$

è valevole qualunque sia ω, purchè la derivazione sia fatta con riferimento ad assi mobili con velocità angolare ω. Essa comprende come casi particolari la equazione (1) relativa ad assi fissi ($\omega = 0$) e la equazione riassuntiva delle tre equazioni di Eulero, purchè si assuma per ω la velocità stessa di rotazione del corpo.

Nella pratica applicazione della (2) si incontrerebbe, in generale, la stessa difficoltà che si trova per l'applicazione della (1), e cioè che il moto del corpo, variandone l'orientazione rispetto agli assi, fa variare il momento K delle quantità di moto indipendentemente da ogni variazione di velocità. In un solo caso tale difficoltà si elimina, quando cioè l'ellissoide d'inerzia sia rotondo, poichè allora, conservando l'asse coordinato z in coincidenza con l'asse di figura del detto ellissoide, gli altri due assi $x\,y$, purchè si mantengano fra loro ortogonali, possono prendere qualunque orientamento nel piano equatoriale senza che perciò abbiano a mutare i rispettivi momenti d'inerzia. Affinchè ciò avvenga, dovranno le componenti intorno agli assi $x\,y$ della velocità angolare del triedro di riferimento essere rispettivamente eguali alle componenti della velocità angolare del corpo, ma potrà essere qualunque la componente della velocità angolare intorno all'asse z.

Se si indicano con A i momenti d'inerzia, fra loro eguali, intorno agli assi $x\,y$, con C il momento d'inerzia intorno all'asse z, con $p\,q\,n$ le componenti della velocità del corpo intorno ai tre assi, saranno

$$\mathrm{A}p \qquad \mathrm{A}q \qquad \mathrm{C}n$$

le componenti del vettore K.

Indicando ancora con $p\,q\,\nu$ le componenti della velocità ω del triedro di riferimento, con P Q N i momenti delle forze esterne rispetto ai tre assi

coordinati, si ha, proiettando la (2) sui tre assi

$$
(3) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (Cn - A\nu)q = P \\ A\dfrac{dq}{dt} - (Cn - A\nu)p = Q \\ C\dfrac{dn}{dt} = N. \end{cases}
$$

Momento, rispetto al centro di gravità della Terra, delle forze di attrazione esercitate da un punto esterno sui varî elementi della massa terrestre.

Sia S un punto di massa M (centro del Sole o della Luna, nel quale punto si supponga concentrata la massa dell'astro), sia r la distanza del punto S dal centro della Terra O ed r_i la sua distanza da un punto della Terra di massa m_i. Se si indica con R_i il vettore $m_i S$, con k la costante dell'attrazione solare, si avrà l'attrazione di S su m_i espressa da

$$k^2 M \frac{m_i}{r_i^3} R_i$$

e si può notare che, essendo $k^2 M \frac{m_i}{r_i^3}$ una quantità scalare, il momento della forza sopra espressa, rispetto a un punto qualunque, è eguale al prodotto della quantità scalare per il momento di R_i rispetto al punto stesso.

Si assuma un sistema di coordinate geocentrico che abbia l'asse c diretto verso il punto S e il piano bc passante per l'asse di simmetria della Terra e sia quindi un piano di simmetria della massa terrestre e si indichino con

$$a_i \qquad b_i \qquad c_i$$

le coordinate del punto m_i, con ϱ_i la distanza di questo punto dal centro della Terra. Il vettore R_i, che ha il suo primo estremo nel punto m_i e l'ultimo estremo nel punto di coordinate o, o, r, avrà le componenti

$$-a_i \qquad -b_i \qquad r - c_i$$

per cui il momento di R_i rispetto all'origine delle coordinate O avrà le componenti

$$b_i r \qquad -a_i r \qquad o$$

e il momento risultante di tutte le forze che sollecitano i varî punti della Terra avrà le componenti

$$k^2 \mathrm{M}\, r\, \Sigma\, m_i \frac{b_i}{r_i^3} \qquad -k^2 \mathrm{M}\, r\, \Sigma\, m_i \frac{a_i}{r_i^3} \qquad o\,.$$

Per la simmetria della massa terrestre rispetto al piano bc, la seconda componente si annulla, poichè ad ogni punto di massa m_i, di coordinate $a_i\, b_i\, c_i$ e distante r_i da S, corrisponde un punto di eguale massa m_i, di coordinate $-a_i\ b_i\ c_i$ e distante quindi ancora r_i da S. Il momento cercato (vettore) è dunque diretto secondo l'asse a; per trovarne la grandezza si osservi che

$$r_i^2 = (r - c_i)^2 + a_i^2 + b_i^2 = r^2 \left(1 - 2\frac{c_i}{r} + \frac{\varrho_i^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{r_i^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - 2\frac{c_i}{r} + \frac{\varrho_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Poichè ϱ_i è la distanza di un punto della Terra dal centro di gravità di questa e c_i una coordinata dello stesso punto in un sistema di assi geocentrico, queste due quantità possono raggiungere tutt'al più la lunghezza del raggio equatoriale terrestre, il quale è sempre molto piccolo in confronto delle distanze dei corpi celesti; perciò si può far uso della serie binomiale, limitando gli sviluppi ai termini di secondo ordine rispetto a $\frac{c_i}{r}$ ed a $\frac{\varrho_i}{r}$. Risulta

$$\frac{1}{r_i^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\frac{c_i}{r} - \frac{3}{2}\frac{\varrho_i^2}{r^2} + \frac{15}{2}\frac{c_i^2}{r^2}\right)$$

e, per conseguenza, il momento cercato sarà

$$k^2 \mathrm{M} \frac{1}{r^2} \Sigma\, m_i \left(b_i + 3\frac{b_i c_i}{r} - \frac{3}{2}\frac{b_i \varrho_i^2}{r^2} + \frac{15}{2}\frac{b_i c_i^2}{r^2}\right).$$

Nella ipotesi fatta che la Terra abbia forma di un ellissoide di rotazione, la massa terrestre sarà simmetrica, non solamente rispetto a qualunque meridiano, ma anche rispetto all'equatore e quindi il centro di gravità è anche centro di simmetria e perciò a ogni punto di massa m_i e di coordinate $a_i\, b_i\, c_i$ corrisponde un punto di eguale massa m_i e di coordinate $-a_i\ -b_i\ -c_i$. In tal caso i termini di ordine dispari in $a_i\, b_i\, c_i$ si annullano e rimane la espressione del momento cercato

$$k^2 \mathrm{M} \frac{3}{r^3} \Sigma\, m_i\, b_i\, c_i\,.$$

Passiamo ora dal sistema di coordinate $a\ b\ c$ all'altro sistema che abbia l'asse x in coincidenza con l'asse a, l'asse z in coincidenza con l'asse di figura della Terra, cioè diretto al polo boreale del mondo e formante quindi con c l'angolo $90 - \delta$, essendo δ la declinazione di S. Sarà z l'asse principale d'inerzia della Terra, al quale corrisponde il momento massimo C e gli assi $x\ y$, situati sull'equatore, quantunque non fissi nella massa terrestre, saranno tuttavia sempre due assi principali d'inerzia, cui corrispondono eguali momenti A. Il momento cercato delle forze di attrazione di S sui varî punti della massa terrestre sarà diretto secondo l'asse x e sarà quindi eguale alla sua componente P, mentre le altre due componenti saranno nulle. Si ha

$$c_i = z_i \operatorname{sen} \delta + y_i \cos \delta$$

$$b_i = y_i \operatorname{sen} \delta - z_i \cos \delta$$

da cui

$$b_i c_i = \frac{1}{2}(y_i^2 - z_i^2) \operatorname{sen} 2\delta - y_i z_i \cos 2\delta .$$

Poichè $x\ y\ z$ sono assi principali d'inerzia si ha

$$\Sigma m_i(y_i^2 + x_i^2) = C \qquad \Sigma m_i(x_i^2 + z_i^2) = A \qquad \Sigma m_i y_i z_i = 0$$

e pertanto

$$P = k^2 M \frac{3}{2r^3}(C - A) \operatorname{sen} 2\delta \qquad Q = 0 \qquad N = 0 .$$

Meteorologia. — *La frequenza dei temporali in Val Padana.* Nota di Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

Dai molti studii sui temporali estivi ne è risultato che la maggior parte di essi, quasi il 70 %, si manifestano in vicinanza del momento in cui suole verificarsi la temperatura massima del giorno. La causa essenziale della formazione di questi temporali, risiede nella elevata temperatura che si raggiunge nei bassi strati atmosferici; essi sono inoltre favoriti da pressione atmosferica quasi livellata, con valore vicino alla media, da venti deboli e da rilevante umidità dell'aria. Come è noto, in tali circostanze si individuano perturbazioni cicloniche poco profonde di piccolo diametro, causate da intense correnti di convezione dovute al maggiore riscaldamento del suolo, le quali divengono tanto più ragguardevoli quanto più rilevante è la diminuzione della tempetatura con l'altitudine.

Il Prestel fu il primo a rilevare che la maggior parte dei temporali estivi si manifesta con pressione barometrica prossima alla media o di poco al disotto di essa. Nei paesi di montagna, dove i temporali locali sono meno

frequenti, si notano tali manifestazioni anche con elevate pressioni barometriche. E più tardi Henry notò che i temporali forti si formano durante piccoli gradienti a venti deboli, mentre un ciclone rilevante con venti forti è per lo più sfavorevole alla formazione dei temporali (1).

Monnè, esaminando le osservazioni temporalesche avvenute ad Utrecht in quasi 20 anni, trovò (2) che ben 83 temporali si verificarono con situazioni barometriche vicine o superiori a mm. 762, 76 temporali con pressione prossima o inferiore a 748 mm. e 51 temporali con depressioni barometriche più accentuate. L'A. ha anche esaminato le osservazioni di temporali raccolte in undici stazioni dell'Olanda, ed è giunto alla conclusione che in prevalenza i temporali si manifestano con situazioni barometriche di valore prossimo o di poco inferiore alla pressione barometrica media.

Hèjas, compulsando le osservazioni di temporali dell'Ungheria per un venticinquennio, notò (3) che la maggior parte dei temporali si manifestarono con situazione barometrica media compresa tra mm. 731 e 734 (ridotta soltanto a zero gradi e non al mare). I temporali a Budapest irrompono con pressione all'incirca tra mm. 737 e mm. 752, e appaiono sporadicamente con situazioni barometriche di valore inferiore a mm. 731 o superiori a mm. 752. Nei mesi primaverili i temporali irrompono più frequentemente durante basse pressioni barometriche che non nei mesi autunnali e invernali; e la causa di ciò forse risiede principalmente nell'andamento annuale della pressione barometrica.

Prohaska, esaminando le variazioni della pressione rispetto alla normale e la frequenza dei temporali avvenuti sulle alpi orientali, conclude che i temporali avvengono con maggior frequenza quando la pressione differisce dalla normale di un millimetro e con minore frequenza quando la differenza è compresa tra 1 e 3 mm.; mentre diminuisce sensibilmente la frequenza per scostamenti superiori.

Klossowky, esaminando le osservazioni eseguite in Russia, trovò che i temporali sono più frequenti con pressioni comprese tra mm. 755 e mm. 760.

Ferrari, considerando le notizie sui temporali raccolte dal 20 aprile al 20 settembre 1880, trova con una differenza di pressione da un'estremità all'altra della penisola non superiore ai tre millimetri e con pressione esattamente livellata sopra la regione considerata, la seguente frequenza che si riferisce complessivamente a tutta l'Italia.

Altezza barometrica	758-759,9	760-761,9	762-763,9	764-765,9	766-767,9
Frequenza temporali	7,2	5,9	2,7	2,3	1,5

(1) Hann J., *Lehrbuch der Meteorologie*, V. Buch, V. Kapitel, Leipzig, 1915.

(2) Monné A. I., *Ueber die Haüfigkeit der Gewitter bei Verxhiedenem Barometerständen. Meteorologische.* Zeitschrift, Wienn, 1904.

(3) Héjas H., idem, ibidem.

Da ciò risulta come la pressione di 758-762, e più specialmente la pressione di 760, sia la più favorevole; di mano in mano che il barometro si innalza diminuisce la probabilità che si verifichino temporali.

La Valle Padana, come è noto, è frequentemente visitata dai temporali, specie nei mesi estivi, a causa della sua conformazione orografica: e appaiono con una determinata distribuzione barometrica che può essere o una depressione o con tipi speciali o con livellamenti. Astraendo dalla distribuzione barometrica, è utile conoscere quali altezze barometriche sogliono con maggiore frequenza favorire le manifestazioni temporalesche nel nostro paese, fondandosi però su un periodo più esteso di quanto è stato fatto finora.

Per tale ricerca abbiamo compulsato il bollettino quotidiano del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica pel decennio 1907-1916. Si è cominciato ad estrarre i giorni con temporali considerando come tali quelli in cui venne osservato qualche temporale almeno in un terzo degli osservatorii distribuiti nella Valle Padana. Per indicare la pressione barometrica media si trascrissero le pressioni, ridotte a mare, osservate nelle seguenti città: Torino, Milano, Brescia, Verona, Padova, Ferrara, Forlì, Piacenza, Alessandria e Modena, alle ore otto del giorno in cui vennero osservati temporali.

Come è noto, nel predetto bollettino quotidiano, le indicazioni dei temporali vengono segnate su una carta che mostra i fenomeni atmosferici avvenuti nelle 24 ore precedenti, e quindi per avere un dato barometrico che corrisponda alla distribuzione barometrica prossima alle manifestazioni temporalesche bisognava considerare la pressione rilevata alle ore otto del giorno nel cui pomeriggio o meriggio si verificarono i temporali. E come media barometrica da attribuirsi a ciascun giorno con temporale abbiamo pertanto considerato quella dedotta dalla media delle dieci città sopra indicate. La ricerca è stata estesa ai mesi da aprile ad ottobre, periodo in cui più frequentemente avvengono le manifestazioni temporalesche, e i giorni con temporali, complessivamente ottenuti, raggiunsero il totale di 959 e sono ripartiti nella seguente tabella secondo i diversi valori della pressione barometrica, nel decennio considerato. Notiamo che sono inclusi, nella finca corrispondente ad un dato valore della pressione, tutti i giorni in cui la pressione media, delle anzidette dieci località fu di sei decimi superiore alla pressione indicata nella finca precedente e di cinque decimi inferiore a quella indicata nella finca seguente.

Fino a 755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	oltre 765
132	51	66	73	99	114	98	96	78	64	91	51

Considerando i totali dell'intero periodo, risulta come il massimo dei temporali avviene con pressione barometrica uguale o inferiore a mm. 755 e quindi concomitante a depressioni barometriche; mentre si distingue un massimo secondario di frequenza per pressioni comprese tra 759 e 762 con un

accentuato aumento per pressione di 760 mm. Possiamo pertanto segnalare questa pressione come quella più favorevole ai temporali e attribuire alla pressione tra 759 e 762 la predominanza dei temporali non contemporanei a profonde depressioni barometriche. All' intento di considerare la distribuzione mensile dei temporali in relazione alla pressione, abbiamo ripartito le singole determinazioni per mesi, e, per avere dei numeri più paragonabili, abbiamo ridotto i numeri dei giorni spettanti a ciascun millimetro di pressione in modo che il numero totale dei giorni del mese con temporali, sia uguale a cento. Dalle cifre così ottenute risulta che il maggior numero dei temporali che avvengono in aprile ha luogo con pressione inferiore o uguale a 755 mm. e che sono quindi legati a speciali depressioni barometriche che interessano la regione considerata. La frequenza dei temporali con tali pressioni va rapidamente diminuendo nei rimanenti mesi, venendo poscia ad accentuarsi per pressioni comprese tra 759 e 762. Anche in aprile si constata

	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre
Fino a 755	*39*	*12*	12	12	6	*15*	8
756	4	8	4	3	7	7	6
757	4	8	6	9	9	5	4
758	6	8	5	9	10	6	*16*
759	8	*14*	12	10	12	5	4
760	9	11	10	*17*	*13*	*11*	*16*
761	*11*	7	12	11	12	10	4
762	6	10	*15*	7	11	7	6
763	3	8	13	10	3	7	10
764	3	5	5	6	8	10	1
765	5	5	3	2	4	6	4
oltre 765	2	4	3	4	5	*11*	21

un massimo secondario con tali pressioni, ma nei mesi successivi la frequenza diviene il massimo principale. In giugno i temporali presentano un massimo secondario di frequenza con pressione vicina a 763; in settembre il massimo secondario di frequenza si ha con pressione superiore a 764 e in ottobre la maggiore frequenza ha luogo con pressioni uguali e superiori a 765, mentre rimane il massimo secondario tra 758 e 760. Raggruppando le cifre anzidette di due in due millimetri, risulta la seguente frequenza da cui appare la massima frequenza dei temporali con pressioni comprese tra 761 e 759 da maggio a settembre e la lieve preponderanza di temporali con pressioni comprese tra 762-764 per giugno e settembre. In ottobre la frequenza è quasi identica per pressioni comprese tra 758-756, 761-759 e oltre 765, mentre in aprile si ha un masssimo secondario di frequenza con pressioni

tra 761 e 759. Possiamo adunque concludere che nei mesi a temperatura elevata il massimo di frequenza dei temporali ha luogo con pressioni variabili tra 761 e 759; e veniamo così a confermare, sull'esame di un materiale molto più esteso, quanto notò il Ferrari per primo, e più tardi Prohaska.

	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre
Oltre 765	7	9	6	6	9	17	25
764-762	12	23	33	23	22	24	17
761-759	*28*	*32*	*34*	*38*	*37*	*26*	24
758-756	14	24	15	21	26	18	*26*
inferiore 755	*39*	12	12	12	6	15	8

Come fu accennato avanti, uno dei fattori più importanti che concorre alla formazione del temporale è l'umidità relativa, verificandosi un sensibile aumento di essa nel periodo in cui individuansi disposizioni favorevoli alle perturbazioni temporalesche. Negli osservatorii italiani non si eseguono alle ore 8 osservazioni di umidità relativa, e l'ora più vicina è quella delle ore 9; abbiamo pertanto fondato la ricerca sui dati rilevati in quest'ultima ora. Nella tabella seguente trascriviamo, per ciascuna città di quelle sopra indicate, eccetto Forlì, il numero delle volte, in cui nei giorni con temporali, l'umidità relativa alle ore 9 fu superiore o inferiore al 60 %, supposto uguale a 100 il totale dei giorni con temporali di ciascun mese.

	Aprile		Maggio		Giugno		Luglio		Agosto		Settembre		Ottobre	
	Sotto 60	Sopra 60	Sotto 60	Sopra 60	Sotto 60	Sopra 60	Sotto 60	Sopra 60	Sotto 60	Sopra 60	Sotto 60	Sopra 60	Sotto 60	Sopra 60
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Alessandria	10	90	16	84	20	80	33	67	13	87	5	95	0	100
Brescia . .	30	70	34	66	32	68	43	57	27	73	10	90	6	94
Ferrara . .	30	70	38	62	45	55	48	52	38	62	17	83	2	98
Milano . . .	30	70	35	65	38	62	48	52	25	75	10	90	4	96
Modena . .	39	61	48	52	56	44	59	41	43	57	27	73	6	94
Padova . . .	15	85	19	81	28	72	28	72	20	80	5	95	1	99
Piacenza . .	20	80	26	74	33	67	37	63	16	84	8	92	7	93
Torino . . .	18	22	23	77	24	76	30	70	10	90	8	92	0	100
Verona . . .	28	72	39	61	49	61	63	37	51	49	18	82	6	94

Risulta chiaramente un massimo di frequenza con umidità superiore a 60 % in tutti i mesi, ma più spiccatamente nei mesi di ottobre, settembre, maggio e aprile. Fanno eccezione i dati relativi alle città di Modena e di Verona per i quali la prevalenza dell'umidità relativa superiore a 60 %

si manifesta solo distintamente in ottobre, settembre e aprile, mentre nei rimanenti mesi manca siffatta prevalenza e anzi nei mesi a temperatura elevata verificasi il contrario, cioè prevalgono i giorni con umidità relativa inferiore a 60 %. Comunque, ci sembra che conoscere la distribuzione dell'umidità relativa al mattino, contemporaneamente alle determinazioni degli altri elementi meteorologici, sia cosa utilissima particolarmente quando debbono effettuarsi previsioni del tempo nelle epoche prossime ai periodi con manifestazioni temporalesche.

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.* Nota di EMILIO ODDONE, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Sotto questo titolo ed in questi Rendiconti sono comparse due Note, nelle quali il prof. C. Somigliana tratta analiticamente un problema di onde piane che può trovare la sua applicazione nella interpretazione delle registrazioni sismiche [1].

L'A. arriva ad una equazione per la velocità di propagazione superficiale, che coincide coll'equazione a cui per altra via giunse Lord Rayleigh. È un'equazione di terzo grado a tre radici, e quando si dà al coefficiente di Poisson il solito valore di 1/4 (per cui il rapporto $\frac{b^2}{a^2}$ dei quadrati delle velocità spaziali delle onde trasversali e longitudinali vale 1/3), esse radici sono tutte e tre reali.

La prima radice vale 4 ed a essa corrispondono due onde associate i cui angoli di emergenza θ_a e θ_b valgono rispettivamente 30° per l'onda longitudinale e 60° per l'onda trasversale.

La seconda radice vale 3,1547 ed alla medesima corrispondono due altre onde associate, i cui angoli di emergenza valgono 12° 47′ per l'onda longitudinale e 55° 44′ per l'onda trasversale.

La terza radice vale notoriamente 0,8453 e vi corrispondono onde, che costituiscono una generalizzazione delle così dette onde superficiali scoperte da Lord Rayleigh.

Costruita così la teoria delle triplici onde piane, sorgeva spontanea l'idea di verificarne la corrispondenza nella sismologia pratica. Le tre radici ed i tre relativi sistemi di onde corrispondono ai tre gruppi di vibrazioni che la sismografia rivela?

La Memoria lascia comprendere che da una risposta affermativa ne potrebbe sortire una nuova rappresentazione meccanica delle oscillazioni

[1] Carlo Somigliana, *Sulla propagazione delle onde sismiche*, Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXVI, ser. 5ª, fascicoli 7° e 9°, 1° sem. 1917.

sismiche; e perciò l'autore si rivolge ai sismologi perchè decidano quale posto convenga di assegnare alle nuove onde.

I sismologi non mancheranno di rispondere volonterosamente a questo cortese invito di guardare ad una questione che è in cima ai loro pensieri; ed io per primo ho cominciato a lavorare di verifica.

Il compito non è però facile, trattandosi di una novità che potrebbe cambiare l'interpretazione solita della propagazione. Tutti i sismologi, siano sperimentatori come Gray, Ewing, Rebeur-Paschwitz, Oldham ed Omori, siano teoretici come Lamb, Love, Lord Rayleigh, Rudtzki, Aug. Schmidt, Laska, Benndorff, v. Kövesligethy, Wiechert, Herglotz, Bateman e Galitzin ritennero che i primi tremiti preliminari fossero le oscillazioni longitudinali, ed i secondi tremiti preliminari fossero le oscillazioni trasversali nel medio illimitato che è la Terra. La nuova interpretazione porta che entrambi questi primi e secondi tremiti siano influenzati dal medio limitato e siano non diversamente dalle onde lunghe, dovuti a sistemi di onde associate, longitudinali e trasversali, a cui il vario angolo di emergenza conferisce velocità superficiali a due a due eguali.

Il primo argomento, col quale ho provato a saggiare la consistenza della nuova teoria delle onde associate, è il seguente.

Si può determinare l'epicentro di un macrosismo coi dati di *distanza* ed *azimut* ricavati da una sola stazione sismica. La distanza è fornita in funzione della differenza dei tempi d'arrivo delle onde (P) e delle onde (S). L'azimut è ricavato sotto forma di tangente, dal rapporto delle ampiezze vere del moto del suolo sulle due componenti orizzontali, l'una all'altra normali. Il metodo, frequentemente adoperato e specialmente dal compianto grande sismologo principe B. Galitzin, comporta tale successo, che le differenze tra i valori degli azimut calcolati e veri non arrivano che a pochi gradi.

Secondo il prof. Galitzin, si deve considerare tale accordo come una dimostrazione diretta del fatto che le onde della prima fase corrispondono realmente a delle vibrazioni longitudinali [1]. E sarebbe come dire che l'applicazione prende in difetto la concezione del prof. Somigliana, secondo la quale le onde (P) nei sismogrammi sono costituite da onde longitudinali associate alle trasversali.

Però l'asserzione del prof. Galitzin non è rigorosa. Il successo dell'applicazione non nuoce alla teoria, se la componente normale alla direzione di propagazione giace tutta nel piano di propagazione; mentre all'evidenza vi nuoce, se esiste una componente parallela all'asse « y » normale al piano di propagazione. Se il vettore, rappresentante la vibrazione, ha la componente $v_3 = \chi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_3 t)$ eguale a zero, la determinazione dell'azimut

[1] B. Galitzin, *Sur la détermination de l'épicentre d'un tremblement de terre d'après les données d'une seule station sismique,* C. R. de l'Ac. des sciences de Paris, 7 et 21 mars 1910.

dell'epicentro anche colla nuova teoria Somigliana riesce. Basta perchè la concezione non sia colta in difetto, che il piano delle vibrazioni trasversali differisca pochissimo dal piano del gran cerchio condotto per l'epicentro e la stazione.

Questa condizione è adempiuta?

oddisfacentemente sì. Le ricerche dirette lasciano ritenere che almeno per le distanze epicentrali comprese fra 65° ed 82° le onde trasversali oscillano circa nello stesso piano come le longitudinali, nel piano cioè individuato dall'ipocentro, dal centro della terra e dalla stazione. La qualcosa è anche comprovata da ciò che il principe Galitzin applicando lo stesso metodo alla seconda fase dei sismogrammi, nella supposizione giungono solo onde trasversali, ottenne ancora successi reali, che non avrebbe ottenuto, ove il vettore di vibrazione avesse una componente parallela all'asse delle y (1).

Il felice esordio per ciò che riguarda la determinazione di *azimut* non è seguito da risultato egualmente buono per ciò che riguarda la determinazione di *distanza.*

Il rapporto $\frac{V_P}{V_S}$ osservato vale 1,85 e la differenza col rapporto teorico $\frac{V_P}{V_S} = 1{,}12$ è troppo forte per potere parlare di accordo soddisfacente.

Questa mia critica però non avrebbe più ragione di essere, ove la teoria fosse compatibile anche con altri valori di questo rapporto, quando, come osserva il prof. Somigliana, si ammettono pel rapporto di Poisson valori diversi da $^1/_4$. È questo un punto che richiede una più completa discussione.

Altre obbiezioni alla nuova interpretazione possono essere le due seguenti:

1°) La velocità, per ognuno dei tre gruppi di vibrazione, è nella teoria delle onde associate, indipendente dalla distanza epicentrale. Secondo l'osservazione, la costanza di velocità di propagazione superficiale è invece solo proprietà specifica delle onde che corrispondono alla terza radice dell'equazione di Rayleigh (onde lunghe); per le onde (P) e le onde (S) la velocità osservata, calcolata lungo la corda e specie lungo la superficie, cresce al crescere della distanza epicentrale, non proporzionalmente alla distanza geodetica, sebbene in un rapporto minore. Questa caratteristica non può che trarre origine da una sintomatica divergenza tra il terzo gruppo d'onde ed i due primi; e non facilita la proposta generalizzazione della soluzione singolare del problema di Lord Rayleigh. Non si vede perchè l'accordo con l'osservazione debba sussistere con una radice della sua equazione, e non abbia parimenti a mantenersi per le altre radici.

(1) B. Galitzin, *Ueber die Schwingungsrichtung eines Bodenteilchens in den transversalen Wellen der zweiten Vorphase eines Bebens,* Bull. de l'Ac. Imp. des Sciences de St. Pétersburg, 1911, pp. 1019-1028.

2°) Gli angoli di emergenza, quali si possono dedurre dalla misura sperimentale del primo scarto delle onde (P), crescono colla distanza epicentrale; e questo comportamento, di preferenza, conferma l'onda longitudinale interna, giacchè se si trattasse di onde superficiali, l'emergenza rimarrebbe circa costante.

Queste discrepanze trovano la loro ragione in ciò che il quesito teorico riguarda le vibrazioni di un suolo illimitato ed infinitamente profondo a cui viene attribuito una densità ed una elasticità omogenea, ed invece, la propagazione sismica si svolge in un sottosuolo a condizioni reali assai differenti. La sismologia non può quindi ancora fare sua una teoria che attribuendo alla Terra una forma che non è quella, e condizioni di elasticità che non sono le vere, toglie al problema i suoi riflessi più belli: alludo a quei mezzi che permettono di arrivare per via indiretta alla conoscenza dell'interno del Globo e delle sue superfici discontinue se ve ne sono.

I sismologi aspettano, con grande interesse, che l'A. trasporti le sue considerazioni, dal modello piano, al campo della sfera vibrante; ed anzichè considerare il Globo come omogeneo-isotropo, lo ritenga isotropo-eterogeneo, la costanza elastica valendo per ogni guscio concentrico.

Aeronautica. — *Sulla misura barometrica delle altezze a scopo aeronautico.* Nota I di MARIO TENANI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Durante il volo, le altezze si deducono dalle misure della pressione atmosferica in base alla formula altimetrica

$$h = \mathrm{A} \log \frac{p}{p_0} (1 + \alpha t_m), \qquad (1)$$

ove h è l'altezza cercata, A una costante, p_0 e p le pressioni misurate alla partenza e al momento della misura, t_m la temperatura media centigrada della colonna d'aria di altezza h e α il coefficiente di dilatazione dei gas. La formula sopra indicata viene generalmente presentata più completa e corredata perciò di altri termini, destinati a tener conto dell'umidità dell'aria, e della variazione della accelerazione della gravità con l'altezza e con la latitudine; termini però che portano sull'altezza, calcolata colla precedente formula, correzioni così piccole da poter essere senza danno trascurate per tutte le applicazioni della navigazione aerea [1].

[1] Risulta infatti, dall'esame della formula altimetrica completa, che solo un errore di 7 od 8 mm. nella tensione del vapore produce un errore nell'altezza equivalente a

Supponendo in quella formula p_0 costante, e facendo sulla temperatura determinate ipotesi, si sono calcolate delle cosidette scale altimetriche in cui l'altezza viene a dipendere dal solo valore p della pressione nel luego di cui si cerca l'altezza; queste scale, disegnate accanto alla scala delle pressioni, permettono di leggere immediatamente di fronte al valore della pressione il valore dell'altezza corrispondente in quelle ipotesi sulla temperatura e sulla pressione di partenza. Ciò avviene appunto nei comuni altimetri sia a lettura diretta, sia a registrazione automatica. In tutti gli altimetri in uso, la pressione di partenza p_0 è ammessa uguale a 760 mm. che è il valore medio della pressione al livello del mare; per quanto riguarda la temperatura i costruttori hanno seguìto le più varie ipotesi. Alcuni hanno ammesso che la temperatura abbia alla partenza il valore di 15° e decresca al crescere dell'altezza di mezzo grado ogni 100 m.; altri hanno supposto che la temperatura della colonna d'aria abbia in tutto il suo spessore la temperatura costante di 0°; altri hanno fatto ipotesi poco diverse dalla prima ora esposta.

Le varie ipotesi sopra accennate messe dai costruttori a base delle loro scale altimetriche corrispondono tutte evidentemente a casi particolari che ben di rado trovano riscontro nella realtà, poichè mentre da un lato l'esperienza comune ci dice che la temperatura ha un valore continuamente variabile e molto nel corso del giorno e dell'anno, d'altro lato le misure della temperatura nell'atmosfera libera hanno messo in rilievo la non meno grande variabilità della legge con la quale la temperatura decresce con l'altezza. Sicchè le altezze calcolate con queste varie ipotesi si trovano generalmente errate di molto, molto più di quanto comporti l'inevitabile inesattezza dello strumento nella misura della pressione. La pressione infatti, a differenza dell'altezza, con la perfezione raggiunta nelle costruzioni, segnatamente da accuratissime case italiane ultimamente specializzate in tale problema, viene indicata con grande esattezza e, ad ogni modo, un preventivo campionamento permette di correggere lo strumento a tale riguardo. Per avere un'idea dell'errore cui determinate ipotesi sulla temperatura possono condurre, da una qualunque tabella pel calcolo delle altezze [1] si può rilevare come alla

---

quello portato da un errore di 1° nella temperatura; ma 7 od 8 mm. di tensione di vapore rappresentano, nella zona temperata, l'intera tensione media del vapore acqueo negli strati bassi, e molto più della media negli strati elevati; dunque l'influenza del vapor acqueo nella determinazione dell'altezza è trascurabile di fronte a quella degli errori inevitabili nella misura della temperatura. Così pure il trascurare l'influenza della variazione dell'accelerazione della gravità con l'altezza e con la latitudine è giustificato dal fatto che, nei limiti in cui si svolge attualmente l'attività aeronautica, le correzioni, da introdursi nei risultati della formula (1), sono in ogni ipotesi inferiori all'1‰.

[1] Ad es. le tabelle dell'Angot o quelle del Jordan.

stessa pressione corrispondano, a seconda della temperatura media che si attribuisce alla colonna di aria, altezze notevolmente diverse.

Ciò si può rilevare anche dalla formula; differenziando rispetto a t_m si ha:

$$dh = A \log \frac{p}{p_0} \alpha \, dt_m .$$

Ma $A \log \frac{p}{p_0}$ è l'altezza h_0 nel caso che $t_m = 0°$; onde $\frac{dh}{h_0} = \alpha \, dt_m$; sostituendo per α il suo valore (circa 0,004) si ha che per l'errore di un grado nell'apprezzamento della temperatura, l'altezza viene errata di 0,4 %. E siccome durante l'anno dei nostri climi, almeno fino a 8 Km., si ha un'oscillazione termica annua che in *media* è di quasi 20°, così si comprende che in molti casi la temperatura media può essere diversa anche di 15-20° da quella ammessa dal costruttore e quindi l'altezza errata del 6 o 8 %.

La seguente tabella ci offre, per le varie pressioni, l'errore nella misura della pressione che equivarrebbe a un errore della temperatura di 5, 10, 15 gradi centigradi. Da essa si rileva quanto sia importante il tener conto del valore attuale della temperatura, poichè si dispone di barometri in cui l'errore tollerabile nella misura della pressione è al massimo di uno o due millimetri.

Pressioni	715	670	626	580	550	515	448	390
Errore nella temperatura	Errore equivalente sulla pressione mm.							
5°	0,8	1,6	2,3	2,9	3,3	3,7	4,2	4,9
10°	1,6	3,2	4,6	5,9	6,7	7,5	8,4	9,8
15°	2,4	4,8	6,9	8,8	9,9	11,2	12,6	14,7

2. Il valore medio della temperatura che compare nella formula (1), non è la media dei valori della temperatura agli estremi dell'altezza da misurarsi. Ciò dipende dal modo stesso come è dedotta quella formula. Se indichiamo infatti con dp la diminuzione di pressione per un piccolo innalzamento dh, con ϱ la densità dell'aria, avremo, posta eguale a 1,293 la densità dell'aria a 0° e 760 mm.,

$$dp = \varrho \, dh \quad \text{ove} \quad \varrho = 1{,}293 \frac{p}{760} / (1 + \alpha t)$$

e quindi

$$\log p = C \int_0^h \frac{dh}{1 + \alpha t} + \log p_0 ,$$

ove C è una costante.

Chiamando t_m una temperatura tale che sia

$$\int_0^h \frac{dh}{1+\alpha t} = \frac{h}{1+\alpha t_m}, \tag{2}$$

avremo appunto

$$h = \mathrm{A} \log \frac{p}{p_0} (1 + \alpha t_m),$$

E si comprende che, salvo casi particolarissimi, t_m è diverso dalla media $\frac{t_0+t_m}{2}$ delle due temperature t_0 e t_m osservate alla partenza e all'altezza h. Ciò dipenderà dalla legge con cui varia t con l'altezza. L'esperienza sola può decidere con quanta approssimazione si possa ritenere $(t_0 + t_h)/2 = t_m$.

Approfitterò perciò delle esperienze eseguite a Vigna di Valle in questi anni, per verificare se, introducendo nella formula (1) la media aritmetica delle temperature osservate al suolo e all'altezza h si ottengono risultati diversi da quelli reali e se la deviazione debba ritenersi importante agli scopi aeronautici. Una ricerca di tal genere credo che non sia stata compiuta per misure eseguite nell'aria libera; e non è a stupirsi che essa conduca a risultati alquanto diversi da quelli ottenuti con analoghi confronti istituiti però con pressioni e temperature misurate *al suolo* a scopo di livellazione: noi ammetteremo che tali risultati valgano, nei limiti assegnati, per l'Italia. Il procedimento eseguito per tale ricerca fu il seguente: si scelsero circa 225 lanci distribuiti nelle varie stagioni presso a poco uniformemente. La scelta venne fatta in modo da comprendere sia giornate calme o con vento forte a tutte le altezze, sia giornate in cui l'atmosfera si trovava calma in basso e agitata in alto e viceversa; e cioè si scelsero lanci molto elevati nei quali il pallone frenato, supportante l'apparecchio, potè arrivare alle alte quote in calma di vento o quasi, o il cervo volante potè, dal vento forte a tutte le altezze, essere sollevato molto in alto; e accanto a questi lanci brevi, interrotti cioè da un mutamento a una certa altezza delle condizioni dell'atmosfera: si riscontrano quasi in ugual numero lanci effettuati con tempo sereno e lanci con tempo coperto. L'ora del lancio è stata molto variabile e vi sono compresi lanci meridiani e lanci notturni. Di tutti questi lanci si fecero due spogli: da prima suddividendo l'altezza in tante parti, da calcolarsi separatamente, corrispondentemente ai punti singolari della registrazione della temperatura; ciascuna delle parti era scelta in modo che la temperatura variasse in esse talmente poco che, nei singoli tratti, si poteva assumere $2t_m = t_{n_1} + t_{n_2}$. Sommando le altezze dei tratti così considerati, si otteneva l'altezza raggiunta. Di poi si calcolava la media aritmetica della temperatura segnata in basso e di quella segnata in alto e in base a questa media delle temperature si applicava la ormula (1) e si calcolava l'altezza. La piccolezza della differenza riscontrata

fra il 1° ed il 2° calcolo quale si manifesta nella seguente tabella, può servire a concludere che presso di noi esistono bensì come negli altri paesi delle singolarità nell'andamento della temperatura con l'altezza (inversioni, isotermie, punti doppî ecc.), ma queste singolarità si manifestano in spessori molto ristretti e non hanno praticamente molta influenza sul valore della temperatura media.

Infatti si rileva, dall'esame complessivo dei lanci, come da noi, salvo casi eccezionalmente di tempo spiccatamente anticiclonico e certamente in casi, da noi non potuti esaminare, in cui il suolo sia coperto di neve, mai si hanno inversioni che superino i due gradi centigradi, e quasi mai tali inversioni e le isotermie si stendono per oltre 100 m. E si noti che in molti dei casi da noi esaminati il pallone, o qualche rara volta il cervo volante, cessava di salire, per mutate condizioni di vento, precisamente in una di dette zone d'inversione e di isotermia e che perciò la media veniva precisamente ad essere influenzata nel modo più spiccato dall'esistenza di tali singolarità nell'andamento della temperatura con l'altezza. Sarà interessante pertanto esaminare la seguente tabella che prova appunto quanto sopra si è detto e altrettanto interessante sarà esaminarvi la frequenza con cui gli scarti di diversa grandezza si manifestano corrispondentemente alle varie altezze.

Analoghi risultati ho ottenuto riassumendo i lanci di pallone sonda effettuati a Pavia.

	Suolo-1000	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
Num. dei casi esaminati	20	55	75	20	55
Media degli errori m.	6	11	19	30	31
Errore medio °/₀ metri	1	0,73	0.75	0,85	0.68
Frequenza degli errori tra 0 e 10 m.	16	28	18	4	9
» » » » 10 e 20 m.	4	27	25	9	8
» » » » 20 e 30 m.	—	—	25	5	13
» » » oltre 30 m.	—	—	7	2	25
Errore massimo m.	15	23	47	40	80

Abbiamo pertanto stabilito che nelle applicazioni in cui non si pretende una precisione superiore all'un per cento nella misura delle altezze (come nelle applicazioni aeronautiche ai calcoli di velocità, dei tiri ecc.) si può usare la formula (1), purchè, in luogo di fare un'ipotesi invariabile sulla temperatura come nei comuni altimetri, si assuma come temperatura media dello strato da misurare la media delle temperature agli estremi.

Questo fatto è fondamentale per le applicazioni aeronautiche e farò seguire la descrizione di nuovi apparecchi occorrenti in pratica per la soluzione del problema così impostato.

Mineralogia. — *L'Anidrite nei blocchi trascinati dalla lava dello Stromboli* [1]. Nota di G. PONTE, presentata dal Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH.

Il materiale frammentario che si accumulò caoticamente nella Fossa dello Stromboli, dopo la formidabile esplosione del 3 luglio 1916, venne poi trascinato in parte dall'impeto della colata lungo la Sciara ed io potei vederne dei blocchi roteare lungo l'erto declivio fino al mare. Alcuni, grossi da 5 a 10 metri cubi, si fermarono sulla spiaggia della Sciara dando così l'opportunità di studiare dei materiali, che mai erano stati osservati allo Stromboli.

Un blocco, del volume di circa 6 metri cubi, attirò più degli altri la mia attenzione; esso si presentava da un lato di color biancastro, mentre dagli altri lati era saldato ad un masso di dolerite bollosa. Nelle piccole cavità e nelle bolle, tanto della roccia biancastra quanto di quella doleritica, si riscontravano degli abbondanti cristallini limpidissimi arrotondati, qualche volta tabulari e splendenti di anidrite. La roccia biancastra in alcuni punti era molto compatta ed aveva tutto l'aspetto d'uno smalto con delle fluttuazioni in tinta più oscura ora giallastra, ora bluastra; in altri punti aveva l'aspetto di una roccia porfirica con fenocristalli profondamente alterati.

Lo Scacchi [2] riscontrò una roccia simile al Vesuvio e la ritenne giustamente un prodotto della trasformazione di una roccia vulcanica « avvenuta in tempi assai remoti per fenomeni di lunga durata riferibili agli incendii del Monte Somma e non all'azione transitoria di un torrente di lava ». Difatti un'azione efficace di lunga durata quale è occorsa per una tale trasformazione in cui, oltre all'azione chimica dei gas magmatici, è stata necessaria quella di una elevata temperatura, può soltanto essere avvenuta nel condotto eruttivo o nelle cavità subcrateriche le cui pareti, sottoposte continuamente all'azione dei gas vulcanici ed alla temperatura elevata, devono essere in continua alterazione.

Anche sull'Etna nella recente eruzione del 24 giugno 1917 ho riscontrato frammenti di una simile roccia alterata; ma lo studio di questi interessanti materiali sarà oggetto di altra Nota limitandomi in questa allo esame dell'anidrite, minerale che viene riscontrato per la prima volta allo Stromboli.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Catania.

[2] A. Scacchi, *Sopra un frammento di antica roccia vulcanica inviluppato nella lava vesuviana del 1872*. Atti R. Accad. Sc. fis. e mat. di Napoli, vol. I, ser. 2ª, n. 5, pag. 2.

I cristallini di anidrite s'impiantarono sulla roccia non durante il suo periodo lento di trasformazione, ma posteriormente, probabilmente dopo che essa fu staccata dalle pareti del camino eruttivo e quando, trascinata dal magma, venne a far parte dell'edificio esterno dei crateri Questa ipotesi è avvalorata dal fatto che i cristallini di anidrite si riscontrano nelle cavità ed anfrattuosità tanto della roccia alterata quanto di quella più recente che la circonda. La trasformazione della roccia non avvenne quindi durante la formazione dell'anidrite, ma precedentemente in una zona più profonda.

Dalla descrizione dello Scacchi sembra che al Vesuvio si siano ripetute le stesse condizioni riscontrate allo Stromboli.

L'anidrite dello Stromboli ha per lo più abito prismatico e spesso tabulare, ma i contorni dei cristalli sono arrotondati così da rendere impossibile ogni misura goniometrica. I cristallini sono limpidissimi e presentano la sfaldatura secondo la base con splendore madreperlaceo e secondo le facce verticali con splendore vitreo.

Ho provato con i raggi X a svegliare la luminescenza della anidrite dello Stromboli, ma tutte le prove furono negative, malgrado mi sia servito di tubi di venti centimetri di diametro di vario stadio eccitati al massimo grado.

Il peso specifico determinato con il metodo della sospenzione nella soluzione di Thoulet risultò 2,981.

L'analisi quantitativa diede i seguenti risultati ridotti a 100:

CaO	42.09
SO_3	57.79
BaO	0.04
SrO	0.06
SiO_2	tracce
Fe_2O_3	0.02

Ancora non si è potuto stabilire con certezza se l'anidrite e la baritina si trovino in miscugli isomorfi o meccanici. Secondo Sommerfeldt [1] questi minerali sarebbero fra di loro isomorfi in quanto possono esistere miscele cristalline fra i due individui; ma nel senso dell'Ostwald queste miscele non possono esistere, poichè la velocità di cristallizzazione di uno di questi minerali in una soluzione di acido solforico non influisce sull'altra. Il Sommerfeldt crede che possa esservi una terza modificazione, non ancora conosciuta, del solfato di calce, isomorfa con la barite.

Non si sa ancora con precisione per quale via avvenga la genesi dell'anidrite, ma è certo che non può formarsi per pneumatolisi diretta; piuttosto potrebbe derivare dallo sfioramento del $CaCl_2$, formatosi per azione del-

[1] E. Sommerfeldt, *Ueber Isomorphie von Anhydrit und Baryt.* Journ. Asiatic. Soc. of. Bengal, 1909, 5, pag. 269.

l'acido cloridrico ad alta temperatura sui silicati di calcio, e dalla successiva azione dell'acido solforico su di esso, come ha ammesso il Doss [1], ma nel caso dell'anidrite dello Stromboli la presenza di sole tracce di silice ne svierebbe l'ipotesi. Il fatto poi che l'anidrite dello Stromboli con tracce di barite e di stronziana, trovasi tanto nelle cavità dalla roccia molto alterata quanto in quelle dell'altra che la circondano non alterata non può far pensare che questo minerale si sia formato direttamente sulla roccia per azione dell'acido solforico, giacchè le due rocce presentano composizione chimica molto diversa: Scacchi pare sia dell'istessa opinione, egli però, come pure lo Zambonini parlano di origine per pneumatolisi, ma non si diffondono a chiarire che per questa via si formerebbe soltanto indirettamente.

Il Manross [2] ottenne l'anidrite artificialmente per fusione del $CaCl_2$ con K_2SO_4. Simmler [3] l'avrebbe ottenuta per sintesi pirochimica fondendo $CaSO_4$, $NaCl$ e SiO_2 e per analoga via l'avrebbe ottenuto pure il Gorgen [4].

Botanica. — *Sulla influenza diretta della linfa elaborata del selvatico sul domestico, e sulla azione che soluzioni acide direttamente assorbite esercitano sulla pianta.* Nota del dott. C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Lincio G. *Studi mineralogici e geologici di località sarde.* I: *Osservazioni petrografiche e genetiche sul giacimento antimonifero di Su Suergiù.* Pres. dal Socio I. Viola.

[1] B. Doss, *Ueber eine zufällige Bildung von Pseudobrookit, Haematit und Anhydrit als Sublimations producte* etc., Zeit. f. Kryst. u. Min., vol. XX, 1892, pag. 586.

[2] Manross, *Versuche ueber die Kunstliche Erzeugung Krystallisirter mineralien.* Ann. d. Chem. u. Pharm., 1852, vol. 82, pag. 352.

[3] Simmler, *Kunstlicher Anhydrit auf pyrochemischem Wege.* Jour. f. prakt. Chemie, 1859, vol. 76, pag. 430.

[4] Gorgen, *Production artificielle de l'Anhydrite,* etc., Boll. d. Soc. franç. d. Min., 1887, tomo 10, pag. 284.

AFFARI DIVERSI

Da ultimo la Classe, di fronte al grande avvenimento storico della liberazione di Gerusalemme per opera dell'esercito inglese col concorso dei soldati francesi e nostri, delibera che i paesi alleati sappiano, per mezzo degli ambasciatori di Inghilterra e di Francia accreditati presso l'Italia, e sappia pure il Governo nostro, il grande compiacimento che l'Accademia ha provato per il memorando fatto rinnovatosi, dopo circa sette secoli d'attesa, per volontà di popoli liberi.

Il Socio Del Lungo soggiunge, fra le vivissime approvazioni dei Colleghi, che con tanto più lieto animo l'Accademia deve votare la proposta che il Presidente sottopone all'approvazione della Classe, se si pensa alleato di quali armi l'esercito italiano è entrato in Gerusalemme, e contro quali armi.

E. M.

INDICE DEL VOLUME XXVI, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1917 — 2º Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

E

F

G

H

L

M

T

V

Z

INDICE PER MATERIE

G

M

ERRATA CORRIGE

A pag. 293 linea 8 invece di « qualsiasi vuoto » leggasi « qualsiasi nel vuoto »
» » 588 linea 2 invece di « poco maggiore » leggere « poco minore »

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 12°, Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 5°-6°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XII. Fasc. 5.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.º — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

RENDICONTI — Dicembre 1917.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 dicembre 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

AFFARI DIVERSI

(*) Questo lavoro sarà pubblicato in un prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*